



# Reconstruction de défauts à partir de données issues de capteurs à courants de Foucault avec modèle direct différentiel

Adrien Trillon

## ► To cite this version:

Adrien Trillon. Reconstruction de défauts à partir de données issues de capteurs à courants de Foucault avec modèle direct différentiel. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010. Français. NNT : . tel-00700739

**HAL Id: tel-00700739**

**<https://theses.hal.science/tel-00700739>**

Submitted on 24 May 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2010

# Thèse de Doctorat de l'École Centrale de Nantes

Spécialité : AUTOMATIQUE, ROBOTIQUE, TRAITEMENT DU SIGNAL ET  
INFORMATIQUE APPLIQUÉE

*Présentée et soutenue publiquement par :*

**Adrien TRILLON**

le 14 octobre 2010

à l'École Centrale de Nantes

## TITRE

**Reconstruction de défauts à partir de données  
issues de capteurs à courants de Foucault  
avec modèle direct différentiel**

## Jury

Rapporteurs :	Jean-François GIOVANNELLI	Professeur à l'Université de Bordeaux
	Marc LAMBERT	Chargé de recherche CNRS, HDR
Examineurs :	Jean-Jacques LAURIN	Professeur à l'École Polytechnique de Montréal
	Yves GOUSSARD	Professeur à l'École Polytechnique de Montréal
	Jérôme IDIER	Directeur de recherche CNRS
	Frédéric SIROIS	Professeur à l'École Polytechnique de Montréal
Invité	Nicolas PAUL	Ingénieur-chercheur EDF R&D

**Directeur de thèse :** Jérôme IDIER  
Laboratoire / composante : IRCCyN / CNRS  
**Directeur de thèse :** Yves GOUSSARD  
Laboratoire / composante : LION / École Polytechnique de Montréal  
**Directeur de thèse :** Frédéric SIROIS  
Laboratoire / composante : LEE / École Polytechnique de Montréal  
**Encadrant industriel :** Nicolas PAUL  
Laboratoire / composante : STEP / EDF R&D

---

---

*A mon frère Vianney, à mes parents...*

« Ils ne savaient pas que c'était impossible, alors ils l'ont fait »  
Mark Twain

« Dans la vie il n'y a pas de solutions. Il y a des forces en marche :  
il faut les créer et les solutions suivent. »  
Antoine de Saint-Exupéry

« La perfection est atteinte, non pas lorsqu'il n'y a plus rien à ajouter,  
mais lorsqu'il n'y a plus rien à retirer. »  
Antoine de Saint-Exupéry

---

# Remerciements

Cette thèse CIFRE en co-tutelle avec l'Ecole Centrale de Nantes et l'Ecole Polytechnique de Montréal s'est déroulée en trois endroits différents : Chatou, Montréal et Nantes. Ce travail m'a permis de voyager, travailler et de vivre de part et d'autres de l'Atlantique, expérience qui fut enrichissante à tous points de vue. Cette organisation a été légèrement compliquée mais m'a permis de profiter des compétences et de l'expérience de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici. Compte tenu des différents lieux fréquentés, il se peut que certains contributeurs soient oubliés, j'espère qu'ils accepteront mes excuses et qu'ils ne m'en tiendront pas rigueur.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mes travaux et mon mémoire de thèse. Je tiens à remercier les rapporteurs pour leurs remarques et leurs conseils.

Je tiens surtout à remercier très sincèrement mes directeurs de thèse, Jérôme, Yves et Frédéric, dont l'expérience et la pédagogie ont été pour moi sources de motivation et de curiosité durant ces trois années. Je remercie, avec la même sincérité, mes encadrants à EDF (par ordre de chronologie), Mabrouka, Stéphanie et Nicolas, avec un accent particulier pour Alexandre qui m'a suivi du début jusqu'à la fin (pour son plus grand malheur).

Compte tenu du nombre d'affectations, j'ai beaucoup de monde à remercier, pas uniquement pour leurs compétences ou leur implication dans ma thèse, mais tout simplement pour leur soutien, leur gentillesse ou le souvenir impérissable qu'elles m'ont laissé.

Ma première affection a eu lieu dans l'équipe STEP à Chatou (Yvelines). Je tiens à remercier le groupe PIB de m'avoir accueilli durant ma première année thèse en commençant par Laurence qui a lancé la machine administrative malgré sa mutation programmée hors de PIB. Je remercie à nouveau, Mabrouka, alors nouvelle embauchée, qui a démarré avec moi sur le sujet de la to-mographie CF, Stéphanie qui m'a encadré durant mon séjour à Chatou et Nicolas qui a repris le flambeau après mon arrivée à Montréal. Alexandre n'était pas initialement un de mes encadrants officiels mais, par sa présence et sa disponibilité, il est devenu un maillon très important de mon travail, je profite de ces lignes pour lui adresser ma reconnaissance. Je remercie également Guy dont l'expérience a toujours été très appréciée. Bien évidemment, je n'oublie pas mes autres collègues de STEP qui m'ont aidé de près ou de loin dans cette aventure : Antoine, Bruno, Steven, Pierre, Louis, Philippe, Noémie, Arnaud, Sylvain, Serge, Luc et Maryte.

Ma deuxième affection s'est déroulée outre-Atlantique à Montréal au Canada (ou plutôt devrais-je dire au Québec) à l'Ecole Polytechnique de Montréal. Je remercie les différents membres du LION de m'avoir accueilli en commençant par Yves qui le dirige. Grâce à lui, il m'a été permis d'effectuer cette deuxième année au Canada, pays qui m'avait toujours attiré. Au-delà de ces considérations géographiques, je le remercie surtout d'avoir partagé avec moi ses connaissances, sa pédagogie et son expérience, même si j'admets, avec regrets ne pas avoir retenu de ses leçons autant que j'aurais aimé. Je remercie de la même façon Frédéric, qui a rejoint le projet en cours de route, mon plus grand regret est qu'il n'ait pas fait partie de l'aventure dès le début pour profiter de ses connaissances, de sa gentillesse et de sa curiosité. Je remercie les français et les québécois que j'ai pu rencontrer au cours de cette année très riche pour moi : Matthieu, pour les grandes discussions que nous avons eues ; Saul, pour les nombreux vendredi soirs passés à manger de la

---

poutine ; David, pour m'avoir appris ce qu'est être québécois ; Benoît, pour sa disponibilité et sa pédagogie que j'essaie d'imiter sans malheureusement égaler ; Qingyi pour les soirées passées à faire du badminton ; Pariya pour sa gentillesse incroyable ; Paul-André pour ses bonnes blagues et sa jovialité ; Brigitte qui a été ma colocataire et qui m'a supporté pendant un an ainsi que Jacques toujours prévenant et sympathique ; Raphaël qui après nos retours en France est resté un ami.

Ma dernière affection s'est passée à Nantes à l'Ecole Centrale. Je remercie les différents membres de l'équipe ADTSI à double titre : pour m'avoir accueilli et pour m'avoir donné l'envie de faire une thèse lorsqu'ils étaient mes professeurs. Sur ce point, je remercie notamment Jérôme qui, malgré plusieurs cours, un projet R&D, un projet de fin d'année et un stage Master, a bien voulu m'encadrer pour cette thèse. Sa fascinante culture scientifique et ses incroyables compétences m'ont laissé penser qu'il pouvait me faire énormément progresser : je n'ai pas été déçu sur ce point. Je remercie donc également : Marie(-Françoise), Eric et Saïd, les avoir eus en tant que professeurs a été pour moi très enrichissant, les côtoyer en tant que collègue l'a été tout autant. J'emploie le terme "collègue" car leur chaleureux accueil m'a toujours fait penser que j'étais considéré comme un collègue et non un doctorant. Je remercie notamment Emilie que j'ai retrouvée avec grand plaisir après trois ans de Centrale (et quelques mois d'Intercentrales) mais également Denis avec qui j'ai partagé les mêmes difficultés et de grandes discussions. Je n'oublie pas non plus Xavier. Merci à vous de m'avoir supporté. Au sein de l'IRCCyN, j'ai effectué de nombreuses rencontres, au risque d'en oublier, je tente de dresser la liste de personnes que je remercie : Pedro (a.k.a MF) pour avoir partagé avec moi pas mal de positions indéfendables ; Loïc, Tomas et Séb pour m'avoir accueilli aussi facilement et rapidement dans leurs soirées dégustation sans lesquelles cette année à Nantes n'aurait pas du tout été la même ; Didier, Charlotte et Olivier pour les nombreux repas au RU et les cafés qui s'en suivaient ! Même s'ils ne sont pas nécessairement estampillés "IRCCyN", je remercie très sincèrement les étudiants de Centrale que j'ai encadrés en TD, TP et TA. Malgré eux, ils m'ont permis de changer d'air.

Indépendamment des affectations, certaines personnes ont contribué, parfois sans s'en rendre compte, à mes travaux. Je tiens ici à les remercier : Julien avec qui Centrale a été un grand plaisir et qui est resté un grand camarade par la suite, qu'il sache que son amitié durant ces années a été un grand soutien ; Gaëtan pour les grands moments de détente qui m'ont permis d'évacuer ; les Pionniers de la IX<sup>ème</sup> Le Mans qui ont également un bon moyen d'oublier la thèse, le camp à la Ciotat reste un très grand souvenir.

Je tiens également à remercier mes collègues et mes supérieurs hiérarchiques dans mon nouveau poste au Vallourec Research Aulnoye qui m'ont accueilli dans leur équipe et qui m'ont également permis de soutenir dans les meilleures conditions.

*Last but not least*, je remercie mes parents et surtout mon petit frère Vianney pour leur soutien indéfectible. Sans eux, il m'aurait été difficile d'aller jusqu'au bout...

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des notations</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Inversion en tomographie de diffraction</b>	<b>7</b>
I.1 Principe général de l'inversion . . . . .	7
I.1.1 Problème inverse . . . . .	7
I.1.2 Problème mal-posé . . . . .	8
I.1.3 Approche bayésienne . . . . .	9
I.1.4 Choix de la régularisation . . . . .	10
I.2 Méthodes d'inversion en tomographie de diffraction . . . . .	15
I.2.1 Principes généraux . . . . .	15
I.2.2 Modélisation classique en inversion CF . . . . .	15
I.2.3 Méthode EDF-EPM . . . . .	17
I.2.4 Contraintes des équations de couplage . . . . .	18
I.2.5 Méthodes de type MGM/CSI . . . . .	21
I.3 Conclusion . . . . .	28
<b>I Modèle direct</b>	<b>29</b>
<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>II Equations électromagnétiques pour les courants de Foucault</b>	<b>33</b>
II.1 Généralités en électromagnétisme . . . . .	34
II.1.1 Equations de Maxwell . . . . .	35
II.1.2 Changement de milieu . . . . .	35
II.1.3 Equation d'Helmholtz . . . . .	36
II.2 Modèle linéaire utilisé dans la méthode EDF-EPM . . . . .	37
II.2.1 Principe . . . . .	37
II.2.2 Simulation . . . . .	39
II.2.3 Conclusion . . . . .	39
II.3 Méthodes intégrales . . . . .	41
II.3.1 Principe . . . . .	41
II.3.2 Discrétisation par méthode des moments . . . . .	42
II.3.3 Conclusion sur les méthodes intégrales . . . . .	43
II.4 Variation d'impédance . . . . .	43
II.5 Conclusion . . . . .	44
<b>III Modèle différences finies</b>	<b>45</b>



III.1	Principe des différences finies . . . . .	45
III.2	Courants de Foucault par méthode des différences finies . . . . .	46
III.3	Conditions aux limites . . . . .	48
III.4	Variation d'impédance par différences finies . . . . .	49
III.5	Simulation . . . . .	50
III.5.1	Calcul du champ électrique incident . . . . .	50
III.5.2	Simulation des données CF . . . . .	51
III.5.3	Conclusion de la comparaison . . . . .	53
III.6	Conclusion . . . . .	54
<b>IV</b>	<b>Modèle éléments finis</b>	<b>55</b>
IV.1	Courants de Foucault par la méthode éléments finis en 2D . . . . .	55
IV.2	Variation d'impédance par EF . . . . .	59
IV.3	Simulation . . . . .	59
IV.4	Conclusion . . . . .	60
	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>
<b>II</b>	<b>Inversion des données CF</b>	<b>65</b>
<b>V</b>	<b>Critère</b>	<b>67</b>
V.1	Notations . . . . .	67
V.2	Problème sans contraintes de couplage . . . . .	68
V.2.1	Critère XF-MGM . . . . .	69
V.2.2	Critère XF-CSI . . . . .	70
V.2.3	Critère XF-Basique . . . . .	71
V.2.4	Liens entre les critères . . . . .	72
V.3	Problème sous contraintes de couplage . . . . .	73
V.4	Approche bayésienne . . . . .	74
V.4.1	Champ de Markov . . . . .	75
V.4.2	Energie minimale . . . . .	77
V.4.3	Contraintes de bornes . . . . .	77
V.5	Conclusion . . . . .	78
<b>VI</b>	<b>Algorithmes de minimisation</b>	<b>79</b>
VI.1	Généralités sur la minimisation . . . . .	80
VI.2	Minimisation sans contrainte : XF-Basique/MGM/CSI . . . . .	80
VI.2.1	Principe . . . . .	81
VI.2.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	81
VI.2.3	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	82
VI.2.4	Choix de $\lambda$ . . . . .	84
VI.2.5	Initialisation de l'algorithme . . . . .	84
VI.2.6	Critère d'arrêt . . . . .	84
VI.3	Minimisation sous contraintes : Lagrangien augmenté . . . . .	84
VI.3.1	Principe . . . . .	85
VI.3.2	Adaptation à l'inversion CF . . . . .	86
VI.3.3	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	87
VI.3.4	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	87
VI.3.5	Critère d'arrêt . . . . .	87
VI.3.6	Réglage de paramètres . . . . .	88
VI.4	Comparaison entre les critères et algorithmes . . . . .	88
VI.4.1	Mémoire . . . . .	88
VI.4.2	Coût de calcul . . . . .	90

VI.4.3	Commentaires . . . . .	91
VI.5	Conclusion . . . . .	91
<b>III</b>	<b>Résultats de reconstruction</b>	<b>93</b>
<b>VII</b>	<b>Méthodologie pour les reconstructions</b>	<b>95</b>
VII.1	Capteur . . . . .	95
VII.2	Protocole pour les reconstructions . . . . .	96
VII.2.1	Méthode EDF-EPM . . . . .	96
VII.2.2	Modèle DF . . . . .	96
VII.2.3	Modèle EF . . . . .	97
VII.3	Défauts simulés . . . . .	98
VII.4	Mesure d'erreur . . . . .	98
VII.5	Conclusion . . . . .	99
<b>VIII</b>	<b>Reconstructions sans contraintes sur l'équation de couplage</b>	<b>101</b>
VIII.1	Méthode EDF-EPM . . . . .	102
VIII.2	Modèle DF . . . . .	103
VIII.2.1	Régularisation par fonction potentiel . . . . .	103
VIII.2.2	Contraintes de bornes . . . . .	105
VIII.2.3	Conclusion . . . . .	106
VIII.3	Modèle EF . . . . .	106
VIII.3.1	Champ de Markov . . . . .	106
VIII.3.2	Etude de la méthode XF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur .	107
VIII.3.3	Etude pour différents défauts . . . . .	110
VIII.3.4	Comparaison des méthodes développées . . . . .	111
VIII.3.5	Impact de $\lambda$ sur les reconstructions . . . . .	118
VIII.4	Conclusion . . . . .	119
<b>IX</b>	<b>Reconstructions par méthodes sous contraintes de couplage</b>	<b>121</b>
IX.1	Introduction du Lagrangien augmenté . . . . .	122
IX.1.1	Résultats . . . . .	122
IX.1.2	Initialisation . . . . .	123
IX.2	Comparaisons entre EF-Basique et EF-AL-Basique . . . . .	124
IX.2.1	Défaut de 2 mm . . . . .	124
IX.2.2	Autres défauts . . . . .	126
IX.3	Introduction des sources de contraste . . . . .	127
IX.3.1	Résultats . . . . .	127
IX.3.2	Initialisation . . . . .	129
IX.3.3	Comparaison avec les autres méthodes . . . . .	129
IX.4	Conclusion . . . . .	132
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>135</b>
	<b>Annexes</b>	<b>143</b>
<b>A</b>	<b>Ensemble d'apprentissage de la RI pour la méthode EDF-EPM</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Configurations des simulations</b>	<b>145</b>
B.1	Paramètres . . . . .	145
B.2	Capteur simulé . . . . .	145
B.3	Domaine de calcul . . . . .	146

<b>C</b>	<b>Courte introduction aux EF</b>	<b>147</b>
C.1	Principe de la méthode des éléments finis . . . . .	147
C.2	Formulation faible dans le cas des CF . . . . .	149
C.3	Calculs avec l'élément de référence . . . . .	150
C.4	Estimation d'erreur . . . . .	151
<b>D</b>	<b>Algorithmes de gradients conjugués</b>	<b>153</b>
D.1	Généralités . . . . .	153
D.2	GC linéaire avec préconditionnement . . . . .	153
D.3	GC non-linéaire . . . . .	153
<b>E</b>	<b>Calculs pour les critères XF</b>	<b>157</b>
E.1	Rappels . . . . .	157
E.2	XF-MGM, XF-CSI et XF-Basique . . . . .	157
<b>F</b>	<b>Calculs pour la minimisation</b>	<b>159</b>
F.1	XF-Basique . . . . .	159
F.1.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	159
F.1.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	159
F.2	XF-MGM . . . . .	160
F.2.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	160
F.2.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	160
F.3	XF-CSI . . . . .	160
F.3.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{w}$ . . . . .	160
F.3.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	160
F.4	XF-AL-Basique . . . . .	161
F.4.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	161
F.4.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	161
F.5	XF-AL-MGM . . . . .	161
F.5.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	161
F.5.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	162
F.6	XF-AL-CSI . . . . .	162
F.6.1	Minimisation par rapport à $\mathbf{w}$ . . . . .	162
F.6.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	162
<b>G</b>	<b>Reconstructions avec la méthode EDF-EPM</b>	<b>163</b>
<b>H</b>	<b>Reconstructions avec les méthodes développées</b>	<b>165</b>
<b>I</b>	<b>Modèle éléments finis avec couplage intégral et éléments de Nédélec</b>	<b>169</b>
I.1	Modèle EF-CI . . . . .	169
I.1.1	Introduction des edge elements . . . . .	169
I.1.2	Couplage avec formulation intégrale . . . . .	172
I.1.3	Préconditionnement pour EF-CI . . . . .	175
I.1.4	Variation d'impédance par EF-CI . . . . .	176
I.1.5	Formulation par rapport au contraste pour EF-CI . . . . .	176
I.1.6	Simulation . . . . .	178
I.2	Inversion . . . . .	179
I.3	Reconstructions . . . . .	180
I.4	Conclusion . . . . .	182
<b>J</b>	<b>Capteurs CF</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>192</b>

<b>Table des figures</b>	<b>195</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>197</b>



# Liste des notations

Toutes les variables notées en gras minuscules sont des vecteurs :  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{e}$ .  
Toutes les variables notées en gras majuscules sont des matrices :  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$ .

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels, des entiers strictement positifs
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	ensembles des réels et des réels positifs
$\mathbb{R}^N$	ensemble des vecteurs réels à $N$ dimensions
$\mathbb{C}^N$	ensemble des vecteurs complexes à $N$ dimensions
$\mathbb{R}^{N \times K}$	ensemble des matrices réelles à $N$ lignes et $K$ colonnes
$\mathbb{C}^{N \times K}$	ensemble des matrices complexes à $N$ lignes et $K$ colonnes
$\mathbf{L}(j, i)$	valeur de la matrice $\mathbf{L}$ à la ligne $j$ et à la colonne $i$
$\mathbf{x}(i)$	valeur du vecteur $\mathbf{x}$ à la ligne $i$
$\Omega, \Gamma$	domaine de calcul, frontière du domaine de calcul
$N_n$	nombre de nœuds dans $\Omega$
$N_e$	nombre d'éléments dans $\Omega$
$N_k$	nombre d'éléments dans la plaque
$N_v$	nombre d'arêtes dans $\Omega$
$L$	nombre de positions du capteur
$\mathbf{y}$	données (champ, variation d'impédance, etc.)
$\Delta Z_\ell$	variation d'impédance aux bornes de la bobine à la position $\ell$
$\mathbf{e}_\ell$	champ électrique dans $\Omega$ lorsque le capteur est à la position $\ell$
$\mathbf{w}_\ell$	source de contraste dans $\Omega$ lorsque le capteur est à la position $\ell$
$\mathbf{x}$	vecteur de la conductivité relative dans $\Omega$
$\mathbf{x}^*$	conjugué de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^t$	transposée de $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^\dagger$	transposée conjuguée de $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{x}\ _p$	norme $L_p$ de $\mathbf{x}$ (si $p$ n'est pas précisée alors $p = 2$ )
$\Re\{\mathbf{x}\}, \Im\{\mathbf{x}\}$	parties réelle et imaginaire de $\mathbf{x}$
$\text{diag}\{\mathbf{x}\}$	matrice diagonale de diagonale $\mathbf{x}$
$\nabla \cdot$	opérateur différentiel nabla

## Grandeurs électromagnétiques

$\sigma, \sigma_0$	conductivité électrique, conductivité électrique dans la plaque
$\mu, \mu_0$	perméabilité magnétique, perméabilité magnétique du vide
$\epsilon, \epsilon_0$	permittivité, permittivité du vide
$I_0$	intensité du courant dans la bobine

## Densités de probabilité

$\sim$  « suit la loi »

$\mathcal{U}(I)$	loi uniforme sur l'intervalle $I$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	loi normale de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$
$\mathcal{B}(\alpha, \beta)$	loi Bêta de paramètres $(\alpha, \beta)$
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	loi Gamma de paramètres $(\alpha, \beta)$

# Introduction générale

## Contrôle non destructif

Le *contrôle non destructif* (CND) est l'ensemble des techniques et procédés utilisables pour évaluer l'état d'une structure sans l'endommager pour une utilisation ultérieure. Les technologies et techniques employées sont diverses et variées. Certaines méthodes ont pour but de détecter les défauts, comme le ressuage et la magnétoscopie, et d'autres estimer les caractéristiques des défauts détectés dans la structure, comme la radiographie et les ultrasons (Champigny, 2005; Dumont-Fillon, 1996; Wanin, 2001).

La radiographie et les ultrasons font partie des techniques d'investigation les plus connues et les plus utilisées que ce soit pour l'imagerie du corps humain ou l'examen de structures. Pour des pièces métalliques, les méthodes électromagnétiques, comme par exemple la magnétoscopie ou les courants de Foucault, sont aussi très largement répandues. Cependant, ces techniques s'utilisent également dans l'industrie que ce soit au moment de la fabrication de pièces afin de s'assurer de la qualité, ou durant la vie d'une pièce pour des questions de maintenance ou de sûreté. L'imagerie est une technique de CND permettant d'obtenir une cartographie précise en 2D ou 3D de la structure interne de l'objet. Elle permet d'obtenir des informations plus précises sur l'objet testé que l'analyse visuelle des signaux obtenus à l'aide d'une méthode d'inspection. L'imagerie médicale en est un exemple très courant et connu. Dans ce cas, la structure testée est biologique (os, organes, etc.).

## Contrôle non destructif à Electricité de France (EDF)

Le contrôle non destructif à EDF est un outil important pour établir des stratégies de maintenance afin d'optimiser la production électrique tout en garantissant la sûreté des centrales nucléaires. EDF utilise différentes technologies selon les pièces à examiner. La radiographie est la technique la plus employée en centrale nucléaire, suivie des techniques ultrasonores. La radiographie est très complexe à utiliser pour des questions d'encombrement et surtout de radioprotection. Les ultrasons posent également un problème d'encombrement du procédé industriel pour des surfaces non planes et proches d'obstacles.

Les *courants de Foucault* (CF) sont également très utilisés pour les éléments métalliques tels que les tubes ou les plaques lorsque les méthodes précédentes ne sont pas applicables.

En pratique, dans les centrales nucléaires, les méthodes par courants de Foucault sont surtout utilisées dans les tubes de générateur de vapeur. Dans ce cas, les CF permettent de prévenir voire de détecter d'éventuelles fuites entre le circuit primaire et le circuit secondaire. En plus de détecter les manques de matière, un autre objectif est d'identifier les éventuels dépôts de matière au niveau des tubes pouvant gêner la circulation des fluides. Pour acquérir les données, une sonde contenant un capteur courants de Foucault est tractée dans chaque tube et les signaux du capteur sont étudiés par un contrôleur afin de détecter des fuites, des fissures ou des dépôts sur le tube testé. Afin d'aider l'analyse des signaux, des données sont mesurées sur des maquettes contenant des défauts connus ou sont simulées à l'aide de code de calculs. Les données des maquettes ou simulées sont alors comparées avec les données réelles pour évaluer la nature du problème et sa gravité. Une fois les défauts et les dépôts détectés, il s'agit de les classer en terme de sévérité



pour la structure. Si le défaut n'est pas dangereux, il est régulièrement surveillé afin de détecter d'éventuelles détériorations. Inversement, si le défaut est trop important, le tube défectueux peut être bouché. Cependant, de manière générale, l'analyse des signaux reste assez simple. En effet, compte tenu de la complexité des phénomènes physiques, il est difficile *de visu* de caractériser l'anomalie (dépôt ou manque de matière) et déterminer la gravité est encore plus difficile.

## Tomographie par courants de Foucault à EDF

Afin d'appuyer et d'aider les experts dans l'évaluation des défauts, le recours à des méthodes de reconstruction tomographique par CF est envisagé. La reconstruction tomographique consiste à évaluer la distribution d'une grandeur d'intérêt à partir de données sur l'objet à reconstruire : c'est un problème inverse. Dans le cas de la tomographie CF, la conductivité est la grandeur d'intérêt utilisée car les données sont sensibles aux variations de conductivité. De plus une diminution de la conductivité indique un manque de matière. Pour représenter un défaut, on peut employer de manière équivalente la conductivité relative, ou contraste, plutôt que la conductivité elle-même. En effet, elle est plus significative car elle permet de quantifier la proportion de manque de matière pour chaque élément du domaine de calcul discrétisé.

Pour résoudre ce problème, il existe de nombreuses méthodes comme les méthodes de type MGM/CSI ou de Newton-Kantorovich. La majorité d'entre elles ne sont pas applicables en l'état à un cadre industriel et restent limitées à des cas simulés ou à des géométries particulières. Pour le moment, l'étude de l'utilisation de la tomographie CF se limite à des plaques métalliques.

Les différents partenariats entre EDF et l'École Polytechnique de Montréal (EPM) effectués depuis 2001 ont débouché sur une méthode d'inversion de données CF. L'objectif de cette méthode est de cartographier la conductivité relative pour reconstruire des défauts débouchants dans des plaques métalliques (Dubost et al., 2006). Cette méthode est basée sur deux étapes. La première concerne l'identification d'un modèle direct linéaire paramétré par une réponse impulsionnelle à partir de données pour des défauts connus. La seconde concerne la reconstruction d'un défaut inconnu à partir de données et du modèle identifié. Ces étapes présentent des difficultés à cause de leur sous-détermination. En effet, il y a plus d'inconnues à estimer que d'équations à disposition. Afin de surmonter ces difficultés, ces étapes recourent à des techniques de régularisation. Celles-ci sont appliquées sur la réponse impulsionnelle estimée ainsi qu'au défaut à reconstruire. En effet, la réponse impulsionnelle est supposée continue et douce tandis que le défaut est considéré constant par morceaux. Au cours des différentes études, les efforts ont surtout été concentrés sur la seconde étape, l'étape d'inversion, et notamment sur la régularisation et la minimisation.

Les reconstructions obtenues à l'aide de cette méthode présentent une ambiguïté entre la largeur et la profondeur du défaut reconstruit. Pour obtenir des résultats de reconstruction corrects, il est nécessaire de lever cette indétermination en fixant la largeur du défaut. La méthode est alors efficace à condition de fixer cette largeur, ce qui revient à se limiter à une classe de défauts. Elle montre ses limites lorsque le défaut recherché n'appartient pas à la classe choisie. La linéarité du modèle direct semble être en partie la cause de ces limites (Dubost and El-Guedri, 2008).

## Travaux de thèse

Nos travaux ont pour but d'améliorer les méthodes de reconstruction développées dans le cadre des partenariats entre EDF et l'EPM. Etant donné que l'approximation linéaire du modèle direct a été identifiée comme un facteur fortement limitant des précédentes méthodes, des efforts particuliers ont tout d'abord été effectués concernant la modélisation directe. Une fois le modèle développé, on a proposé des méthodes d'inversion permettant de tenir compte des spécificités du modèle direct. De plus, afin de lever le caractère mal-posé du problème des *a priori* judicieux ont été développés.

Compte tenu de ces considérations, les objectifs de la thèse ont été :

- d’étudier et proposer des modèles directs pour les CF suffisamment simples et précis pour être exploitables en 2D et en 3D dans le cadre de l’inversion pour des plaques mais également pour d’autres géométries ;
- de développer des méthodes d’inversion pour les CF en exploitant les caractéristiques particulières des modèles directs et en introduisant les informations *a priori* adéquates.

En général, la modélisation a pour objectif de représenter de manière mathématique une réalité physique tout en essayant d’être le plus proche possible de cette réalité. Un bon modèle est avant tout un modèle précis, les problèmes de mémoire ou de temps de calcul sont secondaires. C’est pourquoi, certains modèles peuvent nécessiter plusieurs heures voire plusieurs jours de calcul pour procurer une solution. Dans le cas d’un modèle direct pour l’inversion, les objectifs sont légèrement différents. Il s’agit d’obtenir un modèle qui présente un bon compromis entre simplicité et précision pour être exploitable en inversion. Compte tenu du bruit dans les mesures et dans la chaîne d’acquisition, un modèle extrêmement précis est inutile. De plus, l’inversion peut nécessiter des centaines de résolutions de modèles directs. L’efficacité numérique de cette résolution est donc critique pour l’obtention d’une méthode numérique utilisable en pratique.

Dans notre cas, différentes modélisations ont été étudiées afin d’obtenir un modèle qui soit exploitable pour l’inversion, c’est-à-dire un modèle relativement simple et précis. Dans la littérature, il existe un grand nombre de méthodes de modélisation différentes. Cependant, deux grandes classes de modélisation se distinguent par leur forte présence. La première est basée sur les méthodes intégrales faisant intervenir les fonctions de Green, réponse impulsionnelle ponctuelle de l’équation d’Helmholtz. Cette méthode discrétise la solution de l’équation d’Helmholtz. Bien que ces méthodes soient les plus employées en tomographie de diffraction, les méthodes intégrales ne sont applicables qu’à des géométries canoniques et font intervenir des matrices de Green pleines et difficiles à stocker. La seconde fait intervenir les méthodes différentielles basées sur la discrétisation de l’équation d’Helmholtz puis sur la résolution de l’équation discrétisée. Ces méthodes sont plus faciles à mettre en œuvre et à généraliser. De plus, il est également possible d’employer un maillage adapté à la géométrie du problème avec les modèles différentiels. On a donc privilégié ici les méthodes différentielles telles que les *différences finies* (DF) et les *éléments finis* (EF). Quelle que soit la modélisation adoptée, deux équations sont obtenues. La première est l’équation d’observation qui permet de lier les données CF, la distribution d’un champ électromagnétique et la conductivité relative. La seconde est l’équation de couplage qui permet de lier le champ électromagnétique et la conductivité relative dans le domaine de calcul.

Il existe deux grandes classes de méthodes d’inversion : celles contraignant cette équation (méthode de Newton-Kantorovich ou méthodes de gradients conjugués non-linéaires) et celles relâchant l’équation de couplage (méthodes de type *modified gradient method* (MGM) et *contrast source inversion* (CSI)). Les premières minimisent un critère non-linéaire et nécessitent la résolution du modèle direct à chaque itération, cette étape étant très coûteuse. C’est pourquoi, en tomographie de diffraction, les méthodes de type MGM/CSI sont très classiques car elles évitent la résolution du modèle direct. Ces méthodes permettent de transformer un critère non-linéaire par rapport au contraste en un critère bilinéaire par rapport au contraste et à une variable électromagnétique. Ce critère est égal à la somme pondérée de l’erreur quadratique sur chacune des équations du modèle (observation et couplage). Le critère obtenu est plus facile à manipuler et son gradient est moins coûteux à calculer pour la minimisation. La méthode CSI minimise le critère en question de manière alternée par rapport à chacune des variables. Ceci est équivalent à la résolution répétée de systèmes linéaires à chaque itération.

Dans ce manuscrit, un des principaux objectifs a été d’adapter ces méthodes au cas de la tomographie par CF avec les modèles directs différentiels DF et EF étudiés dans le cadre de cette thèse. Les méthodes MGM et CSI diffèrent entre autres sur le critère minimisé ainsi que

les variables par rapport auxquelles la minimisation est effectuée. Les critères XF-MGM et XF-CSI sont proposés dans ce manuscrit. Ces derniers sont respectivement les adaptations des critères MGM et CSI au modèle différentiel XF (DF ou EF). Cependant, des modifications importantes sur les équations du modèle sont nécessaires pour obtenir ces deux critères. Il est nécessaire d'obtenir une expression de forme algébrique identique à celle obtenue par formulation intégrale, c'est-à-dire sous forme de somme de champs. A notre connaissance, la nécessité de revenir à cette formulation n'a jamais été justifiée dans la littérature. C'est pourquoi, le critère XF-Basique est proposé dans ce manuscrit en se basant sur les équations du modèle sans les modifier. Ce critère est appelé *Basique* car il ne nécessite aucune transformation préalable des équations du modèle direct contrairement aux critères XF-MGM et XF-CSI. Les différences sont importantes entre ces critères en termes de coût de calcul et de mémoire, de prise en compte du capteur, etc.

La tomographie par courants de Foucault est un problème mal-posé. Pour le régulariser, on adopte une approche bayésienne en introduisant des informations *a priori* à travers un terme de régularisation ajouté au critère minimisé. Les défauts recherchés sont des entailles, ainsi la distribution de conductivité dans le domaine de calcul est constante par morceaux. De plus, le défaut est relativement petit par rapport à la taille du domaine étudié. Ces deux *a priori* sont introduits à l'aide d'un terme de régularisation dans le critère. L'ajout de ce terme de régularisation complique peu la minimisation du critère obtenu même si ce dernier n'est pas quadratique. En outre, les défauts recherchés sont des manques de matière. Par conséquent, la conductivité dans le domaine ne peut que décroître et est nécessairement positive. Des contraintes sont la valeur de la conductivité relative sont donc imposées et prises en compte à l'aide d'un algorithme de minimisation sous contraintes. Enfin, les courants de Foucault sont localisés en surface de la plaque, il est inutile de chercher à reconstruire des défauts trop profonds. La zone d'intérêt est donc limitée à une certaine profondeur de la plaque.

Les méthodes MGM et CSI relâchent l'équation de couplage. Ceci se traduit par un critère comprenant l'erreur quadratique pondérée de l'équation de couplage. La pondération du terme d'erreur sur l'équation de couplage a un impact important sur les résultats de reconstruction. Lorsque celle-ci augmente, la qualité des défauts estimés s'améliore, illustrant ainsi la nécessité de contraindre l'équation de couplage. A l'inverse le conditionnement du problème se dégrade, augmentant de manière significative le nombre d'itérations nécessaires pour la minimisation du critère choisi ce qui peut mener à l'impossibilité d'obtenir des solutions. Il faut donc être suffisamment exigeant sur le respect de l'équation de couplage pour avoir une solution qui ait un sens tout en relâchant suffisamment cette équation pour que le mauvais conditionnement n'empêche pas d'obtenir une solution correcte. Afin d'atténuer ce problème de conditionnement tout en contraignant l'équation de couplage, il est proposé dans ce manuscrit d'appliquer la méthode de Lagrangien augmenté au cas de la tomographie par CF à travers les critères développés XF-CSI et XF-Basique. Cette modification améliore grandement les résultats de reconstruction, tout en nécessitant peu de modifications. Ainsi, on obtient respectivement les méthodes XF-AL-CSI et XF-AL-Basique.

Les différents critères et méthodes proposés ont été testés sur des données simulées à partir du logiciel commercial COMSOL indépendant des modèles développés et utilisés pour l'inversion. Ceci permet d'éviter le crime inverse (Wirgin, 2004). L'efficacité des méthodes que nous avons développées est illustrée sur ces cas simulés en se limitant à des plaques et dans un cadre 2D. Ce cadre de travail ne permet pas de représenter exactement une bobine, mais permet cependant d'étudier et tester les méthodologies proposées. Une adaptation du modèle direct à un cas 2D axisymétrique permettrait d'appliquer les méthodes développées dans ce manuscrit à des tubes métalliques testés avec des sondes axiales tout en nécessitant peu de modifications. De plus, les méthodes proposées peuvent être adaptées à des cas 3D pour des plaques de partition de générateur de vapeur sans modifier la méthodologie. De manière générale, toute géométrie peut être employée grâce à l'utilisation des EF pour le modèle direct permettant une grande flexibilité. Pour que la méthode proposée soit applicable, il est nécessaire que le domaine ne soit pas magnétique.

Pour résumer, afin de résoudre le problème posé, il s'agit de choisir le modèle direct adéquat, le critère à minimiser ainsi que le respect ou non des équations de couplage et dans quelle mesure elles doivent être respectées. Le manuscrit est divisé en différentes parties :

- dans un premier temps, les problèmes inverses en général ainsi que leur résolution sont présentés au chapitre I. Une revue de littérature sur la tomographie de diffraction est effectuée montrant la nécessité d'employer un modèle direct dans ce même chapitre. On insiste particulièrement sur les méthodes de type MGM/CSI sur lesquelles sont basées les méthodes proposées par la suite ;
- dans un deuxième temps, les modélisations utilisées pour l'inversion sont décrites. Cette partie a pour objectif d'apporter une réponse sur le modèle direct à employer pour résoudre le problème posé. Au chapitre II, les équations électromagnétiques de base ainsi que la méthode intégrale sont présentées. Au chapitre III, un modèle basé sur les différences finies est proposé et au chapitre IV un autre modèle direct basé sur les éléments finis nodaux est étudié ;
- dans un troisième temps, des méthodes pour l'inversion en tomographie CF sont proposées. Devant le nombre de variantes, de critères et d'algorithmes de minimisation dans la littérature sur la tomographie de diffraction, cette partie a pour but d'apporter des éléments de réponse sur les choix à effectuer sur ces différents points. A l'inverse de la présentation classique dans la littérature des méthodes de type MGM/CSI classiques, critère minimisé, choix de la pondération de l'équation de couplage et algorithme de minimisation sont dissociés. Cette partie présente les différentes contributions sur ces points de ce travail de thèse. Au chapitre V, différents critères basés sur les critères MGM et CSI sont proposés avec une approche bayésienne. Au chapitre VI, les algorithmes de minimisation pour ces critères sont décrits ;
- dans un quatrième temps, des résultats sur des données simulées sont présentés. Au chapitre VII, on présente la méthodologie employée pour effectuer les reconstructions. Au chapitre VIII, les résultats de reconstructions pour la méthode EDF-EPM et pour les méthodes développées sont présentées. Au chapitre IX, les résultats de reconstructions pour les méthodes avec Lagrangien augmenté sont illustrés.



# Chapitre I

## Inversion en tomographie de diffraction

### Sommaire

I.1	Principe général de l'inversion . . . . .	<b>7</b>
I.1.1	Problème inverse . . . . .	7
I.1.2	Problème mal-posé . . . . .	8
I.1.3	Approche bayésienne . . . . .	9
I.1.4	Choix de la régularisation . . . . .	10
I.2	Méthodes d'inversion en tomographie de diffraction . . . . .	<b>15</b>
I.2.1	Principes généraux . . . . .	15
I.2.2	Modélisation classique en inversion CF . . . . .	15
I.2.3	Méthode EDF-EPM . . . . .	17
I.2.4	Contraintes des équations de couplage . . . . .	18
I.2.5	Méthodes de type MGM/CSI . . . . .	21
I.3	Conclusion . . . . .	<b>28</b>

Le problème de tomographie de diffraction en général, et la reconstruction tomographique par CF en particulier, sont des problèmes inverses difficiles à résoudre car mal-posés (Devaney and Sherman, 1982) et potentiellement non-linéaires selon le cadre de travail : fréquence, contraste, etc. Dans ce chapitre, on présente l'inversion dans un cadre plus général afin d'expliquer les difficultés inhérentes à la résolution de ce type de problèmes ainsi que les approches classiques pour les résoudre.

Par la suite, on se focalise sur la tomographie de diffraction, famille à laquelle appartient la tomographie par courants de Foucault. Dans ce chapitre, une revue de littérature sur les méthodes de résolution en tomographie de diffraction est proposée. Deux grandes classes de méthodes se distinguent parmi les autres dans la littérature : celles minimisant un critère avec l'équation de couplage relâchée (*modified gradient method* (MGM), *contrast source inversion* (CSI), etc.) et celles minimisant un critère sous contraintes de couplage (méthodes de Born, méthode de Newton-Kantorovich, méthodes de minimisation globale, etc.).

### I.1 Principe général de l'inversion

#### I.1.1 Problème inverse

L'imagerie ou la tomographie consistent à obtenir la distribution ou la cartographie d'une grandeur physique discrétisée non observable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  à l'aide de données observables  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ .

Dans le cas de la tomographie par CF,  $\mathbf{x}$  correspond à la conductivité absolue ou relative et  $\mathbf{y}$  à la variation d'impédance d'une bobine déplacée au-dessus de la pièce testée. Il s'agit d'un *problème inverse* par opposition au *problème direct*. En effet, ce dernier consiste à créer des données à l'aide d'un modèle mathématique  $f(\mathbf{x})$  liant les données  $\mathbf{y}$  et l'objet  $\mathbf{x}$  ainsi qu'un terme  $\epsilon$  regroupant les différents bruits possibles (mesure, modèle, structure, etc.) :

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) + \epsilon$$

$f(\mathbf{x})$  est une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ . Dans beaucoup d'applications (déconvolution, tomographie par rayons X, etc.), la fonction  $f(\mathbf{x})$  est linéaire ou alors il est possible de l'approcher par une application linéaire telle que  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  une matrice décrivant un phénomène physique (convolution, échantillonnage, flou, transformée de Radon, etc.). Cependant, l'hypothèse de linéarité peut être trop forte dans le cas de la tomographie de diffraction, on reste donc général en considérant  $f(\mathbf{x})$  comme non-linéaire.

En général, le bruit  $\epsilon$  est considéré gaussien centré, faute d'informations sur le bruit. Dans certains cas, il existe des informations supplémentaires sur le bruit. Par exemple, dans le cas de la radiographie, en microscopie à fluorescence ou en astronomie, le bruit peut être considéré poissonien (Bertero et al., 2009; Lu et al., 2004). Cependant, dans notre cas, on se limite au cas du bruit gaussien.

### I.1.2 Problème mal-posé

On se place dans un cadre probabiliste, plus général pour résoudre les problèmes inverses. Les variables intervenant sont considérées aléatoires afin de modéliser une incertitude sur ces dernières. En considérant le bruit gaussien centré *indépendant identiquement distribué* (i.i.d.) et de variance-covariance  $\sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}$ , la *vraisemblance* est ainsi définie :

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = (2\pi\sigma_\epsilon^2)^{-m/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\epsilon^2} \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 \right\}$$

Une méthode envisageable pour résoudre ce problème inverse est de maximiser la vraisemblance. La solution obtenue est le *maximum de vraisemblance*. Cette méthode revient à utiliser la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MV}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{MV}}(\mathbf{x})$$

En posant :

$$\mathcal{J}_{\text{MV}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2 \propto -\ln \{p(\mathbf{y} | \mathbf{x})\}$$

En général, la minimisation du critère  $\mathcal{J}_{\text{MV}}(\mathbf{x})$  engendre des solutions n'ayant aucune réalité physique. En effet, la majorité des problèmes inverses sont des *problèmes mal-posés* car ils ne respectent pas la définition d'un *problème bien-posé* au sens d'Hadamard (Idier, 2008) :

#### Définition I.1 Problème bien-posé

Un problème est dit bien-posé s'il respecte simultanément les conditions suivantes :

- *existence* :  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  ;
- *unicité* :  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , si  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_1)$  et  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_2)$ , alors  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  ;
- *stabilité* : une faible perturbation  $\delta \mathbf{y}$  sur les données  $\mathbf{y}$  a un faible impact  $\delta \mathbf{x}$  sur la solution  $\mathbf{x}$ .

En général, l'existence d'une solution à un problème mal-posé ne pose pas de difficulté contrairement à l'unicité ou à la stabilité. Il peut arriver qu'il y ait plus d'inconnues à estimer que de données à disposition pour le faire, notamment en imagerie. Dans ce cas, l'unicité de la solution n'est pas assurée. De même, des problèmes de stabilité de la solution peuvent se poser lorsque le problème est mal-conditionné ou lorsque les données sont peu sensibles à des points de l'espace.

Pour transformer un problème mal-posé en un problème bien-posé, une approche bayésienne peut être adoptée.

### I.1.3 Approche bayésienne

#### I.1.3.a Loi *a priori*

Pour résoudre les problèmes inverses mal-posés avec une approche bayésienne, des informations que l'on a *a priori* sur l'objet sont introduites : c'est la *régularisation*. Ceci peut se faire à l'aide d'une densité de probabilité *a priori*  $p(\mathbf{x})$ .

En général, la régularisation est introduite en considérant une fonction potentiel  $\phi(\mathbf{x})$ . La loi *a priori* dans ce cas est définie telle que :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp\{-\phi(\mathbf{x})\} \quad (\text{I.1})$$

Cependant, on peut avoir recours à des densités de probabilité *a priori* qui ne font pas intervenir de fonction potentiel comme la loi uniforme par exemple.

Quelle que soit la loi *a priori*, soit la formule de Bayes pour obtenir la loi *a posteriori* de  $\mathbf{x}$  sachant  $\mathbf{y}$  :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}$$

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

où  $p(\mathbf{y})$  est une constante de normalisation. En ne tenant pas compte de la constante de normalisation, la loi *a posteriori* suivante est obtenue :

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$$

Cette loi *a posteriori* fait donc intervenir à la fois les données  $\mathbf{y}$  sur l'objet et les informations *a priori* sur  $\mathbf{x}$ .

Implicitement, on admet qu'il est impossible de calculer exactement la grandeur  $\mathbf{x}^*$  ayant engendré les données bruitées  $\mathbf{y}$ . Cependant, on considère qu'il est possible de trouver une solution  $\mathbf{x}$  proche de  $\mathbf{x}^*$  sans respecter exactement les données plus ou moins bruitées. L'introduction d'*a priori* permet de se limiter à un ensemble de solutions admissibles, ces solutions étant physiquement acceptables.

#### I.1.3.b Estimateur

Lorsqu'une approche bayésienne est adoptée, il convient de se demander quel estimateur doit être choisi pour résoudre le problème posé car celui-ci a un impact sur la solution. Il existe différents estimateurs pour trouver une solution au problème posé à partir de la loi *a posteriori*. L'estimateur le plus couramment utilisé est le *maximum a posteriori* (MAP) défini par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$$

Le calcul de  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}$  peut être considéré comme un problème de minimisation du critère  $\mathcal{J}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ , un critère des moindres carrés régularisés :

$$\mathcal{J}_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + \lambda \phi(\mathbf{x}) \propto -\ln\{p(\mathbf{x}|\mathbf{y})\}$$

où  $\lambda$  est un *hyperparamètre* ou un paramètre de régularisation qui permet de régler le compromis entre l'adéquation aux données et l'*a priori* sur l'objet reconstruit. Ce paramètre est en général choisi manuellement après différents tests. Lorsque  $\lambda$  est grand, les données sont peu prises en compte et l'objet estimé ne dépend que des *a priori* adoptés. Inversement, lorsque  $\lambda$  est trop petit, la régularisation n'intervient pas et le problème reste mal-posé.

La fonction  $g(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  est proportionnelle à l'opposée du logarithme de la vraisemblance :

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \propto -\ln\{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\}$$



En général, sauf information supplémentaire sur le bruit, la vraisemblance suit une loi gaussienne. Dans ce cas, la fonction  $g(\mathbf{x}; \mathbf{y})$  suivante est obtenue :

$$g(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\|^2$$

Pour calculer  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}$  en minimisant  $\mathcal{J}_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$ , il est nécessaire d'avoir recours à des algorithmes d'optimisation. Cet estimateur est le plus utilisé.

Un autre estimateur couramment utilisé est l'*espérance a posteriori* (EAP) définie par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{EAP}} = E[\mathbf{x} | \mathbf{y}] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

Il peut être plus complexe d'estimer  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{EAP}}$  car une intégrale est en général plus difficile à calculer. Dans le cas où  $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  est gaussienne, l'espérance *a posteriori* et le maximum *a posteriori* sont identiques *i.e.*,  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{EAP}} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}$ . Dans le cas contraire, il est possible d'avoir recours à des algorithmes de type *Monte-Carlo par chaînes de Markov* (*Markov chain Monte Carlo* MCMC) (Gilks et al., 1996) pour estimer  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{EAP}}$ . L'estimateur EAP n'a pas d'équivalent déterministe comme c'est le cas pour le MAP qui peut être interprété comme la minimisation d'un critère. Le choix de l'estimateur peut dépendre des difficultés de mise en œuvre.

On préfère utiliser l'estimateur MAP pour résoudre le problème de tomographie car plus classique et plus facile à mettre en œuvre pour ces problèmes.

### I.1.4 Choix de la régularisation

Les informations *a priori* sur l'objet  $\mathbf{x}$  sont contenues dans la loi *a priori*  $p(\mathbf{x})$ . Celle-ci détermine l'ensemble des solutions admissibles. Cette loi *a priori* doit donc être choisie judicieusement. Les champs de Markov constituent les lois *a priori* les plus classiques pour introduire des informations.

#### I.1.4.a Champs de Markov

Des champs de Markov peuvent être introduits dans la loi *a priori*. Ils traduisent la dépendance d'un pixel à ses voisins et ses voisins uniquement *i.e.*, :

$$p(\mathbf{x}(i) | \mathbf{x}(j), j \neq i) = p(\mathbf{x}(i) | \mathbf{x}(j), j \in \mathcal{V}(i))$$

avec  $\mathcal{V}(i)$  le voisinage de l'élément  $i$  *i.e.*, l'ensemble des éléments connexes à l'élément  $i$ . Il convient alors de définir un voisinage. On montre à la figure I.1 un voisinage très utilisé dans le cas d'un maillage 2D cartésien, le voisinage 4-connexe. Le voisinage 4-connexe du pixel central correspond aux 4 pixels qui l'entourent.

Si un tel voisinage est considéré, les cliques existantes sont les singletons, les cliques horizontales et les cliques verticales présentées à la figure I.2.

L'ensemble des cliques de l'image est appelé  $\mathcal{C}$ . On peut distinguer les singletons  $\mathcal{C}_s$ , les cliques horizontales  $\mathcal{C}_h$  et les cliques verticales  $\mathcal{C}_v$ .

On définit  $\mathbf{x}_{c_h} = \mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)$  avec les pixels  $i$  et  $j$  décrivant la clique horizontale  $c_h \in \mathcal{C}_h$ . De même,  $\mathbf{x}_{c_v} = \mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(j)$  avec les pixels  $i$  et  $j$  décrivant la clique verticale  $c_v \in \mathcal{C}_v$ . Enfin,  $\mathbf{x}_{c_s} = \mathbf{x}(i)$  avec le pixel  $i$  le singleton  $c_s \in \mathcal{C}_s$ . Souvent, les cliques horizontales et verticales ne sont pas différenciées. Une matrice  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  peut être introduite représentant l'opérateur effectuant les différences entre les éléments d'une clique en posant  $p$  le nombre de cliques.

Il est également possible d'employer un voisinage 8-connexe. Dans ce cas, les liaisons diagonales sont également prises en compte en plus des liaisons verticales et horizontales entre les pixels.

Introduire un champ de Markov revient à utiliser une fonction potentiel  $\phi(\mathbf{x})$  telle que :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{c \in \mathcal{C}_{hv}} \psi_c(\mathbf{x}_c) + \sum_{c \in \mathcal{C}_s} \psi_s(\mathbf{x}_c) \quad (\text{I.2})$$

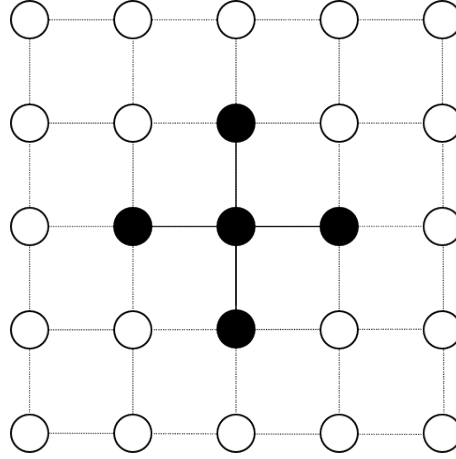


FIG. I.1 – Voisinage 4-connexe

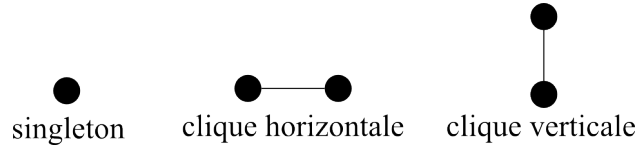


FIG. I.2 – Cliques pour un voisinage 4-connexe

avec  $\mathcal{C}_{hv} = \mathcal{C}_h \cup \mathcal{C}_v$ .

Le choix des fonctions  $\psi_c(\mathbf{x})$  et  $\psi_s(\mathbf{x})$  a un impact très important sur le résultat. En effet, ces fonctions interviennent dans la loi *a priori* sur l'objet à reconstruire. Il convient donc de les choisir judicieusement.

#### I.1.4.b Fonctions potentiel

Afin d'introduire des informations *a priori*, il est habituel d'avoir recours à des fonctions potentiel représentant au mieux les caractéristiques du défaut recherché. On présente différentes fonctions potentiel utilisées dans la littérature et représentatives des *a priori* susceptibles d'être introduits pour résoudre des problèmes inverses.

**Régularisation de Tikhonov** La fonction de régularisation très classiquement adoptée est la régularisation de Tikhonov. Elle consiste à utiliser une fonction de pénalisation quadratique (*i.e.*, une norme  $L_2$  sur  $\mathbf{x}$ ) permettant ainsi d'avoir un système linéaire à résoudre lorsque le bruit est supposé gaussien et le modèle linéaire. D'un point de vue probabiliste, la loi *a priori* est une gaussienne,  $\mathbf{x}$  est une variable gaussienne centrée i.i.d. et de variance-covariance  $\sigma_x^2 \mathbf{I}$  :

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_x^2)^{n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\}$$

Une dépendance entre les éléments voisins peut être traduite à l'aide de champs de Markov (Geman, 1990) présentés précédemment :

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} (\det \mathbf{R})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \right\}$$

On pose  $\mathbf{R}$  la matrice définie positive  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  appelée matrice de variance-covariance dont le déterminant est  $\det \mathbf{R}$ . La norme  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}^{-1}}$  est définie par :

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}$$

La matrice  $\mathbf{R}$  définit la forme du champ de Markov.

Il est très courant de supposer que la variation des valeurs de  $\mathbf{x}$  entre éléments voisins  $D\mathbf{x}$  est également gaussienne centrée de variance  $\sigma_x^2$ . En employant la notation utilisée à l'équation (I.1), on obtient :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{c \in \mathcal{C}_{hv}} \mathbf{x}_c^2$$

En prenant les mêmes notations qu'à l'équation (I.2), on définit la fonction potentiel associée à  $\phi(\mathbf{x})$  :

$$\psi_c(u) = u^2$$

Dans ce cas, si le modèle est linéaire et le bruit considéré gaussien centré, le critère reste quadratique et sa minimisation revient à résoudre un système linéaire, ce qui rend cette régularisation très intéressante. En effet, les systèmes linéaires sont simples à résoudre et très étudiés dans la littérature. Cependant, ce terme de régularisation n'est pas adapté à l'information introduite. En effet, il introduit de la douceur dans la solution (Idier, 2008).

**Régularisation convexe** Dans certains cas, la solution recherchée n'est pas douce et est constante par morceaux, la régularisation de Tikhonov ne permet pas de prendre en compte de manière efficace cette information *a priori*. En effet, les fortes variations au niveau des bords sont trop fortement pénalisées pour se produire.

On cherche des fonctions  $\psi_c(u)$  qui pénalisent moins fortement les fortes variations afin de permettre les transitions plus abruptes, par exemple avec un comportement asymptotiquement linéaire. De plus, les fonctions convexes sont préférées car elles permettent d'assurer l'unicité du minimum du critère lorsque le terme d'adéquation aux données est également convexe.

Les fonctions possédant ce comportement sont nombreuses :

- fonction hyperbolique (Charbonnier et al., 1997) :

$$\psi_c(u; \delta) = \sqrt{u^2 + \delta^2}$$

- fonction de Huber (Idier, 2008) :

$$\psi_c(u; \delta) = \begin{cases} u^2/2 & \text{si } |u| \leq \delta \\ \delta |u| - \delta^2/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

- norme  $L_1$  (Rudin and Osher, 1994) :

$$\psi_c(u) = |u|$$

- norme  $L_p$  (Bouman and Sauer, 1993) :

$$\psi_c(u) = |u|^p \quad 1 < p \leq 2$$

Les fonctions hyperbolique et de Huber ont un comportement quadratique autour de 0. La fonction hyperbolique est asymptotiquement linéaire tandis que la fonction de Huber est exactement linéaire pour  $|u| \geq \delta$ . Toutefois, ces fonctions introduisent un paramètre de réglage supplémentaire  $\delta$  qui définit la transition du comportement quadratique au comportement linéaire. Les fonctions de pénalisation convexes et asymptotiquement linéaire sont qualifiées  $L_2L_1$ . Les fonction de pénalisation asymptotiquement horizontale sont appelées  $L_2L_0$ .

La norme  $L_1$  favorise les valeurs nulles. Lorsqu'elle est appliquée à un gradient, les variations nulles sont donc favorisées. Le caractère constant par morceaux est très bien décrit par cette pénalisation, c'est la *variation totale*. Lorsqu'elle est appliquée aux singletons, la norme  $L_1$  favorise les solutions parcimonieuses. Il est alors possible de trouver une base plus petite pour l'espace de solutions *i.e.*, il existe de nombreuses valeurs du vecteur qui sont exactement nulles. Elle est très utilisée en débruitage (Rudin and Osher, 1994), en déconvolution (Tao and Yang, 2009) ou en compression (Donoho, 2006). Cependant elle a l'inconvénient majeur d'être non différentiable en 0, empêchant l'emploi d'algorithmes d'optimisation d'ordre au moins égal à 1. Pour éviter cette difficulté, souvent la norme  $L_1$  est approchée :

- soit à l'aide de la fonction hyperbolique en faisant tendre  $\delta$  vers 0 (Ciuciu et al., 2001) ;
- soit à l'aide de la norme  $L_p$  en faisant tendre  $p$  vers 1 tout en restant strictement supérieur à 1 (Bouman and Sauer, 1993).

Dans notre cas, les défauts recherchés sont constants par morceaux et possèdent des frontières franches se traduisant par de fortes variations de  $\mathbf{x}$ . Compte tenu de cette information, on peut prévoir d'avoir recours aux fonctions de pénalisation  $L_2L_1$  pour le champ de Markov pour la tomographie CF.

**Régularisation non-convexe** Les fonctions de pénalisation présentées précédemment sont des fonctions convexes. Cependant, il est possible de mieux prendre en compte le caractère constant par morceaux de l'objet à reconstruire à l'aide de fonctions potentiel non-convexes :

- fonction de Geman-McClure (Geman and McClure, 1987) :

$$\psi_c(u; \delta) = \delta / (\delta + u^2)$$

- quadratique tronquée (Blake and Zisserman, 1987) :

$$\psi_c(u; \delta) = \begin{cases} u^2/\delta^2 & \text{si } |u| \leq \delta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- combinaison de fonctions hyperboliques (Goussard and Guichard, 2007) :

$$\psi_c(u; \delta, \xi, \eta) = \sqrt{u^2 + \delta^2} - \delta + \eta \left( \xi - \sqrt{u^2 + \xi^2} \right)$$

avec  $\eta \in [0, 1]$  et  $0 < \delta < \xi$ .

Ces fonctions potentiel ne sont pas convexes, par conséquent le critère à minimiser ne l'est pas non plus. Il peut donc exister des minima locaux au critère. L'emploi d'algorithmes de minimisation globale peut s'avérer nécessaire tels que le recuit simulé (Kirkpatrick et al., 1983) ou les algorithmes génétiques (Mitchell, 1996). Ces algorithmes sont connus pour être très coûteux. Toutefois, dans beaucoup de cas, les algorithmes de minimisation locale donnent des résultats suffisamment satisfaisants et proches du minimum global pour éviter les algorithmes d'optimisation globale. Toutefois, la solution obtenue dépend de l'initialisation.

On peut noter que la combinaison de fonctions hyperboliques a déjà été employée en tomographie CF avec la méthode EDF-EPM présentée plus loin. Cette fonction introduit beaucoup de paramètres de réglage par rapport aux autres.

La loi *a priori* fait classiquement intervenir une fonction potentiel mais peut également prendre d'autres formes.

#### I.1.4.c Régularisation sans fonction potentiel

Dans la section précédente, on a présenté la régularisation utilisant des densités de probabilité liées à des fonctions potentiel pour introduire des informations *a priori* sur l'objet à reconstruire. Ces fonctions potentiel peuvent se révéler limitantes pour représenter certaines informations *a priori*.

Par exemple, certaines contraintes sur l'ensemble des valeurs prises par la variable  $\mathbf{x}$  à reconstruire peuvent exister. Ces contraintes, comme la positivité, peuvent être représentables par des fonctions potentiel mais en modifiant la loi *a posteriori* et en favorisant certaines solutions. La positivité peut être introduite à l'aide d'une loi Gamma (Hsiao et al., 1999). La loi Gamma introduit des termes logarithmiques ce qui complique la minimisation :

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta) = x^{\alpha-1} \frac{\beta^\alpha \exp\{-\beta x\}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } x > 0$$

avec la fonction Gamma :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \exp\{-t\} dt$$

Cependant, elle nécessite le réglage de coefficients supplémentaires. En outre, elle favorise certaines valeurs, ce qui peut être un effet indésirable.

C'est pourquoi, il est également possible de représenter la positivité par la fonction indicatrice de positivité  $\mathbb{1}_+(\mathbf{x})$  sans forcer les valeurs de  $\mathbf{x}$  à tendre vers une valeur particulière ni sans introduire de paramètres de réglage supplémentaires :

$$p(\mathbf{x}) \propto \mathbb{1}_+(\mathbf{x})$$

$$\mathbb{1}_+(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(i) \geq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut noter que la loi *a priori* de  $\mathbf{x}$  qui en résulte est impropre car  $\mathbb{1}_+(\mathbf{x})$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ . Toutefois, il est possible d'obtenir une loi *a posteriori*  $p(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  qui soit propre si  $\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty$ .

Il peut être nécessaire de contraindre les valeurs de  $\mathbf{x}$  à appartenir à un intervalle particulier à l'aide d'une loi Bêta (Premel and Baussard, 2002; Premel and Mohammad-Djafari, 1995) :

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \text{ pour } x \in [0, 1]$$

Dans certains cas, il est possible de connaître *a priori* les valeurs minimale  $x_m$  et maximale  $x_M$  que peut prendre  $\mathbf{x}$  et d'imposer des bornes à  $\mathbf{x}$  autres 0 et 1. Un changement de variable sur la loi Bêta suffit. Cependant celle-ci a également tendance à privilégier certaines valeurs et introduit des paramètres de réglage supplémentaire. C'est pourquoi, il peut être judicieux d'utiliser une loi *a priori* uniforme pour  $\mathbf{x}$  sur l'intervalle  $I = [x_m, x_M]^n$  :

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{U}(I)$$

Cette loi *a priori* est propre car intégrable sur  $\mathbb{R}^n$  contrairement à la fonction indicatrice de positivité.

Il arrive que ces *a priori* ne soient pas suffisamment et que l'on souhaite obtenir une image segmentée : c'est une *approche région*. Dans ce cas, il est possible de considérer  $\mathbf{x}$  comme une variable binaire *i.e.*,  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$  (Bouman and Sauer, 1996; Nikolova and Mohammad-Djafari, 1996) :

$$p(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n [\delta(\mathbf{x}(i)) + \delta(1 - \mathbf{x}(i))]$$

Dans ce cas, le champ de Markov utilisé est un champ de Ising, il favorise les solutions formant des blocs plus ou moins homogènes. L'expression du champ de Ising est la suivante (Pickard, 1987) :

$$\phi(\mathbf{x}) = -\beta \sum_{c \in \mathcal{C}_{hv}} \delta(\mathbf{x}_c)$$

Cette fonction revient à calculer le nombre d'éléments voisins identiques et à favoriser les solutions comportant des voisins identiques. Le coefficient  $\beta$  permet de régler la taille moyenne des blocs homogènes. Plus  $\beta$  est élevé et plus il est probable que des éléments voisins soient identiques. Enfin, un champ externe peut être ajouté, pour favoriser les solutions contenant plus de 0 ou de 1 (Kendall and Snell, 1980).

Dans cette section, l'approche classique pour résoudre les problèmes inverses a été présentée. Cette approche est basée sur l'introduction d'*a priori* pour limiter les solutions à un ensemble physiquement admissible. Dans la section suivante, les méthodes habituelles d'inversion en tomographie de diffraction sont détaillées en termes de modèle, critère et algorithme de minimisation.

## I.2 Méthodes d'inversion en tomographie de diffraction

### I.2.1 Principes généraux

Quel que soit le domaine d'application (biomédical (Barrière et al., 2009), géophysique (Abubakar and Habashy, 2010; Chaturvedi and Plumb, 1995) ou contrôle non destructif (Dubost et al., 2006)), le principe de la tomographie de diffraction est le même : il s'agit d'émettre une onde électromagnétique et de mesurer l'interaction entre l'onde et le milieu inspecté. L'objectif est de cartographier une ou plusieurs grandeurs électromagnétiques selon l'application :

- biomédical : conductivité électrique  $\sigma$  et permittivité diélectrique  $\epsilon$  (van den Berg and Abubakar, 2002) ;
- géophysique : conductivité électrique  $\sigma$  et permittivité diélectrique  $\epsilon$  (Chaturvedi and Plumb, 1995) ;
- contrôle non destructif : conductivité électrique  $\sigma$  (Zorgati et al., 1992) voire perméabilité magnétique  $\mu$  lorsque du matériau magnétique intervient (Monebhurrin et al., 1999; Skarlatos et al., 2007) dans les cas de corrosion.

Ces grandeurs doivent être représentatives d'un défaut et les données doivent y être sensibles pour être exploitables en inversion.

Les problèmes de tomographie de diffraction sont connus pour être mal-posés (Devaney and Sherman, 1982). Le caractère mal-posé peut être amplifié selon le mode d'acquisition des données. En effet, des méthodes d'acquisition effectuant des mesures tout autour de l'objet (comme la *tomographie par micro-ondes* (TMO) (Barrière et al., 2008; Carfantan, 1996)) recueillent plus d'informations que les méthodes ne mesurant que le champ électromagnétique réfléchi par l'objet (comme en CF (Zorgati et al., 1991)), perdant ainsi l'information contenue dans le champ transmis. De plus, selon les contrastes en jeu et les fréquences des ondes émises, les problèmes de tomographie de diffraction peuvent être plus ou moins non-linéaires, compliquant davantage la résolution du problème.

Les méthodes de reconstruction utilisées pour la tomographie de diffraction sont nombreuses et variées. Les plus faciles à mettre en place sont basées sur l'apprentissage comme les réseaux de neurones. Les réseaux de neurones (Rekanos et al., 1997; Song and Shin, 2000; Yusa et al., 2002) nécessitent d'avoir des données pour des défauts connus. Le réseau de neurones apprend à reconnaître des défauts en utilisant les défauts et les données qu'il connaît. Cette méthode est très facile à utiliser mais fonctionne comme une boîte noire. De plus, son efficacité dépend fortement de l'ensemble d'apprentissage, ce qui rend la méthode peu robuste et très peu efficace lorsque le défaut à reconstruire a des caractéristiques différentes des défauts utilisés pour l'ensemble d'apprentissage. Ceci limite l'utilisation de cette méthode.

Un modèle direct peut être employé afin d'obtenir une méthode de reconstruction plus robuste et surtout éviter l'aspect « boîte noire » des réseaux de neurones. Cependant les équations électromagnétiques et la modélisation sont difficiles à manipuler et peuvent nécessiter beaucoup d'expérience et de moyens. C'est pourquoi, on peut préférer identifier un modèle de formation de données linéaire (comme la méthode EDF-EPM (Dubost et al., 2006)) ou paramétrique (Davoust et al., 2006). L'inconvénient de ce type de méthodes est une fois encore la sensibilité des résultats d'inversion à l'ensemble utilisé pour identifier les modèles (Dubost and El-Guedri, 2008). Pour obtenir une méthode plus robuste et résoudre ce type de problèmes inverses, une approche classique est d'utiliser un modèle direct basé sur la résolution d'équations physiques (Idier, 2008).

### I.2.2 Modélisation classique en inversion CF

On présente ici la modélisation classique employée en tomographie de diffraction. Il est important de noter que le modèle présenté est utilisé à des fins d'inversion. Il s'agit uniquement de montrer brièvement les équations du modèle généralement employé pour pouvoir présenter les méthodes classiques d'inversion. Les différentes formes possibles de modélisation sont présentées dans la partie suivante de ce manuscrit.

La modélisation du problème est liée à la résolution de l'équation d'Helmholtz qui lie la distribution du champ électrique  $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$  à la distribution de conductivité  $\sigma \in \mathbb{R}^n$  et donc à la distribution de conductivité relative  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  des  $n$  éléments. On a deux équations électromagnétiques nécessaires :

– équation d'observation :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}\mathbf{e} \quad (\text{I.3})$$

– équation de couplage (distribution du champ électrique) :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{G}_{22}\mathbf{X}\mathbf{e} \quad (\text{I.4})$$

Avec la distribution de la conductivité électrique :

$$\mathbf{x}(i) = \frac{\sigma_0 - \sigma(i)}{\sigma_0}$$

$$\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$$

Les matrices  $\mathbf{G}_{12} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  et  $\mathbf{G}_{22} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sont les matrices de Green dont l'expression et la signification physique sont détaillées au chapitre II.  $\mathbf{e}_0$  correspond au champ électrique incident dans le domaine de calcul, c'est le champ électrique lorsque l'objet est sans défaut.  $\mathbf{y}$  correspond aux données, en général en tomographie de diffraction, un champ électromagnétique diffracté est mesuré. Cependant, les données peuvent également être des mesures de variation d'impédance comme c'est le cas en CF.  $\mathbf{G}_{22}\mathbf{X}\mathbf{e}$  correspond au champ diffracté dans la plaque à cause du défaut et  $\mathbf{G}_{12}\mathbf{X}\mathbf{e}$  le champ diffracté dans l'air.

Dans la littérature, les sources de contraste  $\mathbf{w}$  sont souvent utilisées (van den Berg and Kleinman, 1997), elles sont définies par  $\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}$  et correspondent à des sources de courant fictives dues à la variation de conductivité par rapport à la situation sans défaut. A notre connaissance, aucune explication n'a été apportée dans la littérature pour l'utilisation des sources de contraste. Toutefois, on peut voir les sources de contraste comme les sources du champ diffracté qui est la grandeur mesurée. De plus, le produit  $\mathbf{X}\mathbf{e}$  apparaît, utiliser  $\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}$  permet de faire disparaître ce terme. Les équations (I.3) et (I.4) deviennent alors :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{12}\mathbf{w} \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}_0 + \mathbf{X}\mathbf{G}_{22}\mathbf{w} \quad (\text{I.6})$$

Quelle que soit la variable électromagnétique utilisée (champ électrique ou source de contraste), ces deux équations sont généralement utilisées pour résoudre le problème de tomographie de diffraction.

Malgré la profusion de méthodes possibles, les méthodes de type MGM/CSI se distinguent des autres par leur forte présence dans la littérature (Abubakar and van den Berg, 2004; Barrière et al., 2008; Kleinman and van den Berg, 1992; van den Berg and Abubakar, 2001; van den Berg and Kleinman, 1995, 1997). Ces méthodes se basent sur la minimisation d'un critère relâchant le respect de l'équation de couplage permettant ainsi d'obtenir un critère bilinéaire. *A contrario* d'autres méthodes sont basées sur la minimisation du problème sous contraintes de cette équation électromagnétique (Franchois and Pichot, 1997; Soleimani et al., 2006). Ces dernières nécessitent la résolution d'un modèle direct à chaque itération. Cette étape est très coûteuse ce qui a favorisé l'émergence et l'emploi des méthodes de type MGM/CSI.

Différentes méthodes d'inversion sont présentées dans cette section, notamment les deux grandes classes de méthodes déjà citées auparavant : les méthodes de type Born et les méthodes de type MGM/CSI. Toutefois, on présente tout d'abord la méthode actuellement à l'étude à EDF.

### I.2.3 Méthode EDF-EPM

La méthode EDF-EPM actuellement étudiée à EDF est issue d'un partenariat entre EDF et l'EPM depuis 2001 (Goussard and Guichard, 2001, 2003, 2004, 2005, 2007).

Cette méthode est basée sur un modèle linéaire :

$$\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{h}$$

La réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}$  est estimée à l'aide de données  $\Delta \mathbf{Z}$  pour des défauts  $\mathbf{x}$  connus. La procédure est détaillée au chapitre II. Faire l'approximation de Born forte revient à considérer que le champ électrique dans le milieu est le même avec ou sans défaut, *i.e.*,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$ . Dans ce cas, le modèle est linéaire par rapport à  $\mathbf{x}$ . Choisir un modèle linéaire est assez proche de faire l'approximation de Born.

Une fois le modèle  $\mathbf{H}$  estimé, il est possible de reconstruire le défaut. On cherche à minimiser un critère reliant les données  $\Delta \mathbf{Z}$  et l'objet  $\mathbf{x}$ . Le critère pourrait être le critère des moindres carrés.

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \|\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{H} \mathbf{x}\|^2 \quad (\text{I.7})$$

Ce critère n'est pas suffisant à cause de la sous-détermination du système et la solution obtenue n'a aucune signification physique. La résolution du problème peut être améliorée en introduisant des *a priori* sur l'objet  $\mathbf{x}$  par l'intermédiaire de la fonction  $\Psi(\mathbf{x})$  (Goussard and Guichard, 2001).

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}; \lambda, \mathbf{w}) = \|\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{H} \mathbf{x}\|^2 + \lambda \Psi(\mathbf{x}; \mathbf{w}) \quad (\text{I.8})$$

$$\Psi(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \sum_{m=0}^3 w_m \psi^{(m)}(\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{x}) \quad (\text{I.9})$$

$\mathbf{D}^{(m)}$  est une matrice de différences premières : 1 pour la direction  $\vec{x}$ , 2 pour la direction  $\vec{y}$  et 3 pour la direction  $\vec{z}$ . On pose  $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}$ .

Plusieurs hyperparamètres sont présents dans le critère :

- $\lambda$  qui permet de régler l'importance des données par rapport aux *a priori*. Il est ajusté par essais et erreurs.
- $\{w_0, \dots, w_3\}$  qui permettent de pondérer la pénalisation des discontinuités en privilégiant des directions par rapport aux autres.

La fonction de pénalisation  $\Psi(\mathbf{x})$  est choisie de telle sorte qu'elle :

- permette les discontinuités sans léser les zones homogènes ;
- prenne en compte le caractère binaire de la solution.

On considère la fonction  $\psi_c(u; \delta, \xi, \eta)$  combinaison de fonctions hyperboliques (Goussard and Guichard, 2005) :

$$\psi(u; \delta, \xi, \eta) = \sqrt{\delta^2 + u^2} + \eta \left( \xi - \sqrt{\xi^2 + u^2} \right) \quad (\text{I.10})$$

Avec  $\delta$ ,  $\mu$  et  $\eta$  des scalaires, vérifiant :

$$0 < \delta < \mu \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 1$$

Cette fonction a plusieurs particularités :

- autour de 0, elle se comporte comme une fonction quadratique ;
- en  $\pm\infty$  elle présente une asymptote de pente  $\pm(1 - \eta)$ .

La fonction  $\psi^{(m)}(u)$  est explicitée à l'aide de la fonction précédemment proposée :

$$\psi^{(m)}(u) = \begin{cases} \psi_c(u; \delta, \xi, \eta) + \psi(u - 1; \delta, \xi, \eta) & \text{si } m = 0 \\ \psi_c(u; \delta, \xi, \eta) & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci permet d'avoir les caractéristiques souhaitées :

- un rappel à 0 et à 1 sur les valeurs de  $\mathbf{x}$  pour la binarité de l'objet. A noter qu'un rappel à 0 et à 1 est également testé sur les différences premières (Chatellier et al., 2006) dans une version antérieure de la méthode. Le but est de favoriser une fois de plus le caractère binaire de la solution. D'après les études effectuées (Goussard and Guichard, 2007), le rappel à 0 et à 1 sur les différences n'apporte pas de différences notables.



- $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \tilde{\psi}(u) = \text{cte}$  possible en posant  $\eta = 1$ . Ceci afin que la pénalisation appliquée à chaque composante de la solution présente des minima locaux autour de 0 et de 1 sans trop pénaliser les discontinuités.

Lorsque  $m = 0$  la fonction de pénalisation comporte deux termes de rappel vers 0 et vers 1 car la fonction possède deux minima en 0 et en 1. Ceci permet de prendre en compte le caractère binaire de la solution sans pour autant contraindre la solution à être binaire. Cependant on perd la convexité du critère, or la convexité permet de garantir la convergence d’algorithmes de minimisation vers le minimum global.

Auparavant, dans les versions précédentes de l’application, la fonction de pénalisation hyperbolique  $\psi(u) = \sqrt{\delta^2 + u^2}$  était utilisée (Goussard and Guichard, 2001), mais elle ne remplit pas les conditions énoncées précédemment notamment le caractère binaire de la solution.

La méthode EDF-EPM permet de s’affranchir de toute équation physique puisque le modèle linéaire est identifié. Cependant, les limites de cette méthodes sont illustrées au chapitre VIII montrant ainsi la nécessité de modifier le modèle et d’employer les équations physiques à disposition. Dans la suite, les méthodes les plus classiques tenant compte de la physique sont détaillées en différenciant celles qui respectent l’équation de couplage et celles qui la relâchent.

### I.2.4 Contraintes des équations de couplage

Le modèle direct procure deux équations algébriques, les équations d’observation et de couplage, liant le contraste  $\mathbf{x}$  et une grandeur de champ électromagnétique : le champ électrique  $\mathbf{e}$  ou les sources de contraste  $\mathbf{w}$ . Une approche naturelle est d’éliminer la variable électromagnétique puisque ce n’est pas la variable d’intérêt *in fine*. En résolvant l’équation (I.4), on obtient :

$$\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{e}_0$$

En utilisant l’équation précédente et l’équation (I.3), par substitution l’équation suivante est obtenue :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{e}_0 \quad (\text{I.11})$$

On pose :

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{e}_0$$

L’équation (I.11) est non-linéaire par rapport à  $\mathbf{x}$ . Le critère à minimiser n’est donc pas quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$  :

$$\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{e}_0 \right\|^2 \quad (\text{I.12})$$

La non-linéarité de l’équation (I.11) rend difficile la minimisation du critère obtenu à l’équation (I.12). En effet, la minimisation de ce critère nécessite le calcul du gradient  $\nabla \mathcal{J}_{\text{NL}}$  du critère  $\mathcal{J}_{\text{NL}}$ . Or le calcul de celui-ci nécessite la résolution du modèle direct qui est très coûteux.

De plus, il paraît peu probable que  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  soit convexe. La convexité du critère implique l’unicité du minimum du critère, la réciproque est fausse. Il est donc vraisemblable qu’il y ait des minima locaux et non un minimum unique à ce critère. Dans ce cas, certains auteurs proposent d’avoir recours à des algorithmes de minimisation globale (comme le recuit simulé (Garnero et al., 1991) ou des algorithmes génétiques (Caorsi et al., 2004; Massa et al., 2004)) bien que ces derniers soient en général très coûteux. Afin de trouver le minimum global, une autre méthode basée sur les algorithmes à non-convexité graduelle a été proposée (Carfantan, 1996). Cette méthode part du constat que la non-linéarité du critère, et donc sa non-convexité, provient du terme  $\mathbf{G}_{22}\mathbf{X}$ . Elle propose d’introduire une suite de pondération  $r_n$  sur ce terme avec  $r_0 = 0$ . Cette suite doit être croissante et tendre vers 1. Le critère suivant est minimisé itérativement :

$$\mathcal{J}_{\text{GNC}}^{(n)} = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}(\mathbf{I} - r_n\mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{e}_0 \right\|^2$$

Le critère minimisé à la fin est bien le critère (I.12) puisque  $r_n$  tend vers 1.

L'emploi d'algorithmes de minimisation locale peut s'avérer suffisant pour minimiser le critère à l'équation (I.12). C'est pourquoi d'autres méthodes sont employées, comme la méthode de Gauss-Seidel qui consiste à minimiser le critère composante par composante du vecteur  $\mathbf{x}$  les autres étant fixées. Dans ce cas, il est possible d'obtenir l'expression du minimiseur du critère par rapport à chaque composante (Carfantan et al., 1997). Cependant, ce type de schéma d'optimisation est connu pour être lent (Press et al., 1992). De plus, la convergence de l'algorithme n'est pas nécessairement assurée selon le choix de la méthode de recherche du minimum (Sotthivirat and Fessler, 2002).

Une autre méthode proposée par (Carfantan and Mohammad-Djafari, 1997b) est d'éviter l'explicitation des contraintes et de minimiser un critère basé sur le Lagrangien augmenté (Bertsekas, 1996). Ceci permet d'éviter la résolution du modèle direct à chaque itération tout en respectant l'équation de couplage à la convergence de l'algorithme (Bertsekas, 1999). De plus, les modifications à apporter aux méthodes de type MGM/CSI pour contraindre les équations de couplage à l'aide du Lagrangien augmenté sont mineures tout en conservant la caractéristique intéressante de ces méthodes explicitées plus loin. Cette méthode ne permet cependant pas de supprimer la variable électromagnétique employée augmentant ainsi la mémoire nécessaire.

Les méthodes sont donc nombreuses pour minimiser le critère (I.12). Toutefois, on présente plus en détail les plus usuelles et les plus classiques dans la littérature : les méthodes de type Born. Ces méthodes sont basées sur des hypothèses plus ou moins simplificatrices. Parmi les méthodes les plus classiques, on trouve :

- méthode de Born ;
- méthode de Born itérative (*Born iterative method BIM*) ;
- méthode de Born itérative distordue (*distorted Born iterative method DBIM*).

Ces méthodes classiques en tomographie de diffraction sont basées sur des linéarisation successives du critère non-linéaire (I.12). On se limite à donner quelques généralités à leur propos.

#### I.2.4.a Méthode de Born

La méthode de Born est la plus simple des méthodes citées précédemment. Elle est basée sur l'approximation de Born forte considérant que le champ électrique dans le matériau testé est le même avec ou sans défaut quel que soit le défaut.

Cette approximation revient à considérer que  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$  i.e., d'après l'équation (I.4) :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X})^{-1} \approx \mathbf{I}$$

On obtient donc un modèle direct linéaire en  $\mathbf{x}$  (Zorgati et al., 1991) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{12}\mathbf{E}_0\mathbf{x}$$

$$\mathbf{E}_0 = \text{diag}\{\mathbf{e}_0\}$$

Le critère quadratique à minimiser devient :

$$\mathcal{J}_{\text{Born}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{E}_0\mathbf{x}\|^2$$

Un critère quadratique est très classique à minimiser et ne présente pas de difficulté en soi. Cependant, l'hypothèse de linéarité est vérifiée pour les faibles contrastes, des défauts de petite taille devant la longueur d'onde et pour les basses fréquences ce qui est assez limitant (Slaney M. and L.E., 1984). Néanmoins, elle permet de simplifier énormément le problème et d'obtenir des résultats corrects lorsque ces conditions sont vérifiées.

#### I.2.4.b Méthode de Born itérative

La méthode de Born itérative est la méthode la plus simple sans faire d'approximation linéaire du modèle direct  $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ . Elle est basée sur l'approximation de Born (Wang and Chew, 1990) et

consiste à minimiser à chaque itération le critère :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\text{BIM}}^{(n)}(\mathbf{x}; \mathbf{e}^{(n)}) &= \left\| \mathbf{y} - \mathbf{G}_{12} \mathbf{E}^{(n)} \mathbf{x} \right\|^2 \\ \mathbf{e}^{(n)} &= \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}_{22} \mathbf{X}^{(n)} \right)^{-1} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{E}^{(n)} &= \text{diag}\left\{ \mathbf{e}^{(n)} \right\}\end{aligned}$$

L'algorithme de minimisation du critère (I.12) basé sur la méthode de Born itérative est présenté à la table I.1.

**Sorties :**  $\mathbf{x}$  l'objet.  
 Initialisation :  $n \leftarrow 0, \mathbf{x}^{(0)}$ ;  
**répéter**  
   Calcul de  $\mathbf{e}^{(n)}$ ;  
    $\mathbf{x}^{(n+1)} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{BIM}}^{(n)}(\mathbf{x}; \mathbf{e}^{(n)})$ ;  
    $n \leftarrow n + 1$ ;  
**jusqu'à** Convergence  
 Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. I.1 – Algorithme classique de la méthode de Born itérative

Bien que le modèle soit linéaire itérativement, cette méthode est efficace pour les petits défauts et les basses fréquences de manière moins restrictive que la méthode de Born. Cependant, elle nécessite la résolution du modèle direct une fois à chaque itération. Cette résolution est très coûteuse et par conséquent la méthode de Born itérative est très longue.

#### I.2.4.c Méthode de Born itérative distordue

La méthode de Born itérative distordue est très utilisée dans la littérature pour résoudre le problème de tomographie de diffraction (Chew and Wang, 1990). Comme la méthode précédente, elle consiste également à minimiser itérativement un critère. Le critère minimisé est le suivant :

$$\mathcal{J}_{\text{DBIM}}^{(n)}(\mathbf{x}) = \left\| \mathbf{y} - \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(n)}) - \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}) \right\|^2$$

La minimisation de critère nécessite la calcul de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ . Celle-ci est obtenue par identification à l'aide de la formule de Taylor d'ordre 1 de l'équation (I.11) :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) &= \mathcal{M}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \delta \mathbf{x} + o(\|\delta \mathbf{x}\|^2) \\ \mathbf{J} &= \mathbf{G}_{12} \left( \mathbf{I} - \mathbf{X}^{(n)} \mathbf{G}_{22} \right)^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{G}_{22} \mathbf{X}^{(n)} \right)^{-1} \mathbf{e}_0\end{aligned}$$

Cette méthode revient à minimiser itérativement l'approximation quadratique du critère passant par le point  $\mathbf{x}^{(n)}$ . L'algorithme est proche de celui de la méthode de Born itérative à la table I.1. A chaque itération, il faut mettre à jour la matrice  $\mathbf{J}$  faisant intervenir la résolution du modèle direct ainsi que la résolution du modèle adjoint. Avec cette matrice, on peut calculer  $\mathbf{x}^{(n+1)}$  le minimum de  $\mathcal{J}_{\text{DBIM}}^{(n)}(\mathbf{x})$ .

Cette méthode est équivalente à la méthode de Newton-Kantorovitch (Carfantan, 1996) et s'apparente à la méthode de Levenberg-Marquardt (Franchois and Pichot, 1997).

Un point négatif important de ces méthodes est l'inexistence du calcul d'un pas dans la direction de descente. En effet, ces méthodes minimisent l'approximation quadratique du critère. La direction de descente est donc le vecteur reliant le point courant  $\mathbf{x}^{(n)}$  et le minimum de son approximation

quadratique  $\arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{DBIM}}^{(n)}(\mathbf{x})$ . Cette méthode revient à calculer à chaque itération la direction de descente  $\mathbf{d}^{(n)}$  solution du système linéaire suivant :

$$(\mathbf{J}^t \mathbf{J}) \mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{J}^t \left( \mathbf{y} - \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(n)}) \right)$$

En outre, la descente du critère (I.12) à chaque itération n'est pas assurée. En effet, s'il est évident que  $\mathcal{J}_{\text{DBIM}}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n+1)}) < \mathcal{J}_{\text{DBIM}}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n)})$ , la condition de descente du critère non-linéaire  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x}^{(n+1)}) < \mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x}^{(n)})$  n'est pas du tout assurée. Ceci pourrait être assuré avec un calcul de pas adéquat comme le font les méthodes de Newton afin de rendre la minimisation plus efficace.

À part la méthode de Born, les méthodes de type Born ont l'inconvénient majeur de nécessiter la résolution du modèle direct à chaque itération voire également la résolution du modèle adjoint. Il peut être intéressant d'éviter ces résolutions comme le font les méthodes MGM ou CSI.

### I.2.5 Méthodes de type MGM/CSI

La minimisation du critère à l'équation (I.12) peut être très coûteuse à cause de la résolution nécessaire du modèle direct à chaque itération. Les méthodes de type *modified gradient method* (MGM)/*contrast source inversion* (CSI) permettent d'éviter cette résolution. C'est pourquoi, elles figurent parmi les plus classiquement utilisées (Kleinman and van den Berg, 1992; van den Berg and Abubakar, 2001; van den Berg and Kleinman, 1997). Elles sont basées sur la minimisation d'un critère est égal à la somme pondérée de l'erreur quadratique sur chacune des équations du modèle (observation et couplage). Ces méthodes mélangent des aspects très différents tels que choix de critère, choix de coefficient de pondération de l'erreur de l'équation de couplage et algorithme de minimisation. Ceci est inhabituel en inversion. De plus, il existe de nombreuses variantes (régularisation additive ou multiplicative, contraintes sur  $\mathbf{x}$ , etc.) et certains points, tels que les critères d'arrêt, ne sont pas nécessairement explicités entraînant un certain flou. Il est donc très difficile de définir précisément ce que sont ces méthodes. Toutefois, il est ici proposé d'éclaircir et d'explicitier les aspects originaux et intéressants de ces méthodes.

#### I.2.5.a Principes généraux

Les méthodes MGM et CSI sont très utilisées en tomographie de diffraction. Elles sont utilisées dans différents domaines notamment en biomédical (Abubakar et al., 2005; Gilmore et al., 2009; van den Berg et al., 2009), en géophysique (Abubakar and Habashy, 2010; Abubakar et al., 2006) et en CND (Dos Reis et al., 2002). Bien que différentes, ces méthodes suivent un schéma particulier. On tente de diviser le principe des méthodes de type MGM/CSI en trois aspects différents détaillés plus loin :

1. critère minimisé ;
2. choix de la pondération  $\lambda$  sur l'erreur quadratique de l'équation de couplage ;
3. algorithme de minimisation.

**Critères** Les méthodes de type MGM/CSI sont basées sur la minimisation d'un critère composite pondérant les erreurs quadratiques des équations d'observation et de couplage. Historiquement, les méthodes de type CSI sont inspirées de la MGM proposée au début des années 90 par Kleinman et van den Berg (Kleinman and van den Berg, 1992). La méthode MGM est la première méthode à proposer la relaxation des contraintes de couplage afin d'obtenir un critère bilinéaire. Ce critère est constitué des deux équations et est plus facile à manipuler et à minimiser que le critère (I.12). En effet, sa minimisation ne nécessite pas de résoudre le modèle direct. Bien que rapidement supplantée par la méthode CSI, la méthode MGM a pourtant continué à être utilisée mais à moindre échelle (Monebhurrin et al., 1999).

Le critère de la méthode MGM est basé sur l'erreur quadratique pondérée des équations d'observation (I.3) et de couplage (I.4), exprimées en fonction du contraste  $\mathbf{x}$  et du champ électrique  $\mathbf{e}$ . On appelle pour la suite, critère MGM :

$$\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda_{\text{MGM}}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}\mathbf{e}\|^2 + \lambda_{\text{MGM}} \|\mathbf{e} - \mathbf{e}_0 - \mathbf{G}_{22}\mathbf{X}\mathbf{e}\|^2 \quad (\text{I.13})$$

Le critère MGM est l'erreur quadratique pondérée des équations d'observation et de couplage. L'équation de couplage est écrite sous forme de somme de champs électriques incident et diffracté.

Le critère de la méthode CSI est également basé sur l'erreur quadratique pondérée des équations d'observation (I.5) et de couplage (I.6) exprimées en fonction du contraste  $\mathbf{x}$  et des sources de contraste  $\mathbf{w}$ , cette fois. On appelle dans la suite, critère CSI :

$$\mathcal{J}_{\text{CSI}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \lambda_{\text{CSI}}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{G}_{12}\mathbf{w}\|^2 + \lambda_{\text{CSI}} \|\mathbf{w} - \mathbf{X}\mathbf{e}_0 - \mathbf{X}\mathbf{G}_{22}\mathbf{w}\|^2 \quad (\text{I.14})$$

Dans ce cas-ci, l'équation de couplage est écrite sous forme de somme de sources de contraste.

La différence entre les critères MGM et CSI est assez minime, les sources de contraste  $\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}$  remplacent le champ électrique  $\mathbf{e}$  et l'équation de couplage (I.4) a été prémultipliée par  $\mathbf{X}$  pour obtenir l'équation de couplage (I.6). Les deux critères sont donc différents mais très proches. On peut se demander si les minima de  $\mathcal{J}_{\text{MGM}}$  et  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  ne sont pas très proches pourvu que des  $\lambda_{\text{CSI}}$  et  $\lambda_{\text{MGM}}$  équivalents puissent être trouvés. Dans l'idéal, les minima des critères devraient être exactement identiques puisque le défaut à reconstruire est le même.

Le réel intérêt des méthodes MGM/CSI réside dans ces critères. En effet, au lieu de minimiser le critère non-linéaire (I.12), les méthodes MGM/CSI minimisent les critères (I.14) et (I.13) bilinéaires par rapport à  $\mathbf{x}$  et à  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$ . Ces critères permettent de transformer un problème de minimisation d'un critère non-linéaire sous contraintes de couplage en un problème de minimisation d'un critère bilinéaire sans contraintes. En effet, un critère non-linéaire est généralement plus difficile à minimiser d'où l'intérêt de passer à un critère bilinéaire. Cependant, la solution de la minimisation de ces critères bilinéaires ne respecte pas l'équation de couplage et une erreur sur cette dernière est acceptée. Cette erreur peut toutefois dégrader la qualité des reconstructions obtenues.

**Choix de  $\lambda$**  Comme on le précise dans le paragraphe précédent, les critères MGM et CSI autorisent une erreur sur l'équation de couplage dont la valeur dépend de la valeur de  $\lambda$ . Plus le coefficient  $\lambda$  est élevé et plus l'erreur est faible. Les méthodes MGM et CSI proposent chacune une formule empirique pour le calcul de  $\lambda$ . Ces formules sont les suivantes (van den Berg and Abubakar, 2001; van den Berg and Kleinman, 1997) :

$$\lambda_{\text{MGM}} = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{e}_0\|^2} \quad \lambda_{\text{CSI}} = \frac{\|\mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{X}\mathbf{e}_0\|^2} \quad (\text{I.15})$$

L'heuristique permettant d'obtenir ces formules est la même pour ces deux méthodes :  $\lambda$  correspond au rapport des erreurs quadratiques des équations d'observation et de couplage lorsque  $\mathbf{e} = 0$  et donc lorsque  $\mathbf{w} = 0$ .

On remarque que dans le cas où  $\mathbf{x} = 0$  *i.e.*, le cas sans défaut, le coefficient de pondération  $\lambda_{\text{CSI}}$  donné par l'équation (I.15) n'est pas défini. Dès lors, il est impossible d'initialiser la méthode par l'objet sans défaut. De plus,  $\lambda_{\text{CSI}}$  dépend de  $\mathbf{x}$  et donc varie au cours de la reconstruction. A l'inverse  $\lambda_{\text{MGM}}$  est constant et fixé dès le départ. Dans (Barrière et al., 2008), il est proposé de fixer manuellement  $\lambda_{\text{CSI}}$  dès le départ de la minimisation du critère permettant ainsi de minimiser le critère affiché sans pour autant respecter une quelconque règle empirique. Il est plutôt proposer d'effectuer différents tests sur des objets simulés connus et de choisir une valeur de  $\lambda$  efficace.

**Minimisation** Une fois le critère défini et  $\lambda$  choisi, il est nécessaire de minimiser le critère pour trouver une solution au problème. Les méthodes de type MGM et les méthodes de type CSI proposent un algorithme de minimisation à cet effet. Dans les variantes classiques de MGM/CSI, chaque minimisation du critère par rapport à  $\mathbf{x}$  et par rapport à  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$  est inspirée de la méthode

de *gradients conjugués* (GC) non-linéaires. Les critères étant bilinéaires, les gradients des critères par rapport à chaque variable sont linéaires. Il existe toutefois une différence importante entre les deux méthodes MGM et CSI, c'est pourquoi on les sépare pour les expliquer. On montre à la table I.2, l'algorithme classique de minimisation dans les méthodes de type MGM et à la table I.3 l'algorithme de minimisation utilisé par la CSI.

**Sorties :**  $\mathbf{x}$  l'objet.  
 Initialisation :  $n \leftarrow 1$ ,  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\mathbf{e}^{(0)}$ ,  $\mathbf{u}^{(0)} \leftarrow 0$  et  $\mathbf{v}^{(0)} \leftarrow 0$ ;  
 Calcul de  $\lambda_{\text{MGM}}$ ;  
**répéter**  
   Calcul des directions de descente  $\mathbf{u}^{(n)}$  et  $\mathbf{v}^{(n)}$  en fonction de  $\mathbf{x}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{e}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(n-1)}$  et  $\mathbf{v}^{(n-1)}$ ;  
   Calcul des pas de descente  $\alpha^{(n)}$  et  $\beta^{(n)}$ ;  
    $\mathbf{e}^{(n)} \leftarrow \mathbf{e}^{(n-1)} + \alpha^{(n)}\mathbf{u}^{(n)}$ ;  
    $\mathbf{x}^{(n)} \leftarrow \mathbf{x}^{(n-1)} + \beta^{(n)}\mathbf{v}^{(n)}$ ;  
    $n \leftarrow n + 1$ ;  
**jusqu'à**  $n > Nb_{\text{iter}}$   
 Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. I.2 – Algorithme de minimisation de la méthode MGM

**Sorties :**  $\mathbf{x}$  l'objet.  
 Initialisation :  $n \leftarrow 1$ ,  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,  $\mathbf{w}^{(0)}$ ,  $\mathbf{u}^{(0)} \leftarrow 0$  et  $\mathbf{v}^{(0)} \leftarrow 0$ ;  
**répéter**  
   Mise à jour de  $\lambda_{\text{CSI}}$ ;  
   Calcul de la direction de descente  $\mathbf{u}^{(n)}$  en fonction de  $\mathbf{x}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{w}^{(n-1)}$  et  $\mathbf{u}^{(n-1)}$ ;  
   Calcul du pas de descente  $\alpha^{(n)}$ ;  
    $\mathbf{w}^{(n)} \leftarrow \mathbf{w}^{(n-1)} + \alpha^{(n)}\mathbf{u}^{(n)}$ ;  
   Calcul de la direction de descente  $\mathbf{v}^{(n)}$  en fonction de  $\mathbf{x}^{(n-1)}$ ,  $\mathbf{w}^{(n)}$  et  $\mathbf{v}^{(n-1)}$ ;  
   Calcul du pas de descente  $\beta^{(n)}$ ;  
    $\mathbf{x}^{(n)} \leftarrow \mathbf{x}^{(n-1)} + \beta^{(n)}\mathbf{v}^{(n)}$ ;  
    $n \leftarrow n + 1$ ;  
**jusqu'à**  $n > Nb_{\text{iter}}$   
 Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. I.3 – Algorithme de minimisation de la méthode CSI

**Minimisation MGM** La méthode MGM calcule au point courant  $(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{e}^{(n)})$  une direction  $\mathbf{u}^{(n)}$  pour  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{v}^{(n)}$  pour  $\mathbf{x}$  avec la méthode de Polak-Ribière (Nocedal and Wright, 2006; van den Berg and Abubakar, 2001). C'est sur ce point que la méthode MGM se démarque de l'algorithme de GC non-linéaires. Dans le cas d'un classique GC, une seule direction de descente est calculée avec un seul pas de descente. Dans le cas de la MGM, les pas de descente  $\alpha^{(n)}$  et  $\beta^{(n)}$  sont les pas de descente optimaux respectivement dans les directions de descente  $\mathbf{u}^{(n)}$  et  $\mathbf{v}^{(n)}$ . Le point  $(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{e}^{(n+1)})$  est donc constitué de  $\mathbf{e}^{(n+1)}$  le minimum de  $\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{e})$  et de  $\mathbf{x}^{(n+1)}$  le minimum de  $\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}^{(n)})$ . Le *gradient modifié* est en réalité

$$\nabla_{\text{MGM}} \mathcal{J}_{\text{MGM}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{(n-1)} - \mathbf{x}^{(n)} \\ \mathbf{e}^{(n-1)} - \mathbf{e}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{(n)} \mathbf{u}^{(n)} \\ \beta^{(n)} \mathbf{v}^{(n)} \end{pmatrix}$$

au lieu du vrai gradient

$$\nabla \mathcal{J}_{\text{MGM}} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{MGM}} \\ \nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}_{\text{MGM}} \end{pmatrix}$$

Une rapide analyse de l'algorithme montre que la descente du critère à chaque itération n'est pas assurée *i.e.*, il n'est pas garanti que  $\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}^{(n+1)}, \mathbf{e}^{(n+1)}) < \mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{e}^{(n)})$ . Ce qui est assez gênant pour une méthode de minimisation.

**Minimisation CSI** Le principe de l'algorithme CSI est la minimisation alternée du critère par rapport à une variable puis par rapport à l'autre. Comme on le présente dans un paragraphe précédent, le critère CSI est bilinéaire par rapport à  $\mathbf{x}$  et à  $\mathbf{w}$ . La minimisation par rapport à l'une des variables en fixant l'autre permet d'avoir à minimiser un critère quadratique à chaque itération. Autrement dit, le principe de la minimisation CSI est de transformer la minimisation d'un critère non-linéaire par rapport à  $\mathbf{x}$  en minimisation alternée de deux critères quadratiques par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{w}$ . Indépendamment du choix de critère CSI et de la formule de  $\lambda_{\text{CSI}}$ , l'algorithme de minimisation CSI est une méthode de type *block coordinate descent* (BCD) (Bertsekas, 1999; Charbonnier et al., 1994). Ces algorithmes à minimisation alternée ne sont pas particulièrement efficaces mais sont utilisés lorsqu'il est possible de paralléliser les minimisations pour un critère séparable comme c'est le cas en tomographie de diffraction. On peut noter également que pour simplifier la minimisation, la dépendance de  $\lambda_{\text{CSI}}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  n'est pas prise en compte lors de l'étape de calcul de  $\mathbf{x}^{(n)}$ . En effet,  $\lambda_{\text{CSI}}$  est considéré constant pour chaque étape et est mis à jour à la fin de chaque itération, le critère minimisé n'est donc pas le critère affiché.

Quelle que soit la méthode de minimisation adoptée pour les méthodes de type MGM/CSI, l'algorithme global de minimisation est arrêté au bout d'un certain nombre d'itérations  $Nb_{iter}$  dans la littérature en tomographie de diffraction (Kleinman and van den Berg, 1993; van den Berg and Abubakar, 2001). L'initialisation de l'algorithme MGM est effectuée avec l'objet sans défaut  $\mathbf{x}_0$  et le champ incident  $\mathbf{e}_0$  (Kleinman and van den Berg, 1993). L'initialisation de l'algorithme CSI doit être effectuée avec une solution autre que  $\mathbf{x}_0$  lorsque  $\lambda_{\text{CSI}}$  est calculée à chaque itération avec l'heuristique proposée (van den Berg and Kleinman, 1997). En général,  $\mathbf{w}^{(0)}$  est calculé en minimisant le terme de d'adéquation aux données.  $\mathbf{x}^{(0)}$  est calculé en minimisant le critère pour  $\mathbf{w}^{(0)}$  (van den Berg and Abubakar, 2001).

Pour résumer, la minimisation MGM est une minimisation jointe tandis que la minimisation CSI est alternée. Dans le cas de la méthode MGM, la direction de descente pour le calcul de  $\mathbf{x}^{(n)}$  dépend de  $\mathbf{x}^{(n-1)}$  et de  $\mathbf{e}^{(n-1)}$ . À l'inverse, dans le cas de la méthode CSI, la direction de descente pour le calcul de  $\mathbf{x}^{(n)}$  dépend de  $\mathbf{x}^{(n-1)}$  et de  $\mathbf{w}^{(n)}$ . C'est la différence entre les deux méthodes de minimisation.

### I.2.5.b Commentaires

On récapitule les principales caractéristiques des méthodes MGM et CSI à la table I.4 afin de mettre en avant les points communs et les différences entre elles.

Ces méthodes sont très présentes dans la littérature mais comportent toutefois un certain flou. En effet, elles mélangent des aspects très différents tels que le critère à minimiser, le coefficient de pondération de l'erreur de couplage et la méthode de minimisation. En général, ces aspects d'un problème sont différenciés les uns des autres. Comme son nom le laisse supposer, on peut voir la méthode MGM, *modified gradient method* (Kleinman and van den Berg, 1992, 1993) comme une méthode de minimisation inspirée des méthodes de gradient plus conventionnelles. Cependant, il est difficile de dire si ces méthodes sont surtout liées au critère et/ou au choix de  $\lambda$  et/ou à l'algorithme de minimisation.

Dans la suite de ce mémoire, on distingue critères MGM et CSI et également algorithmes de minimisation MGM et CSI.

	MGM	CSI
variables	$(\mathbf{x}, \mathbf{e})$	$(\mathbf{x}, \mathbf{w})$
critère	$\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda_{\text{MGM}}) = J_1 + \lambda_{\text{MGM}} J_2$	$\mathcal{J}_{\text{CSI}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda_{\text{CSI}}) = J_1 + \lambda_{\text{CSI}} J_2$
$J_1$	$\ \mathbf{y} - \mathbf{G}_{12} \mathbf{X} \mathbf{e}\ ^2$	$\ \mathbf{y} - \mathbf{G}_{12} \mathbf{w}\ ^2$
$J_2$	$\ \mathbf{e} - \mathbf{e}_0 - \mathbf{G}_{22} \mathbf{X} \mathbf{e}\ ^2$	$\ \mathbf{w} - \mathbf{X} \mathbf{e}_0 - \mathbf{X} \mathbf{G}_{22} \mathbf{w}\ ^2$
$\lambda$	$\ \mathbf{y}\ ^2 / \ \mathbf{e}_0\ ^2$	$\ \mathbf{y}\ ^2 / \ \mathbf{X} \mathbf{e}_0\ ^2$
		choisi manuellement et constant
minimisation	jointe	alternée
critère arrêt	Nb. d'itérations fixé	Nb. d'itérations fixé

TAB. I.4 – Tableau récapitulatif et comparatif des méthodes MGM et CSI

**Points communs** Devant les différentes variantes de méthodes MGM et de méthodes CSI, il est nécessaire pour des questions de clarté de définir précisément ce que sont les méthodes MGM et CSI. On appelle dans la suite *méthode de type MGM/CSI* toute méthode basée sur la transformation d'un critère non-linéaire en un critère bilinéaire en introduisant une variable auxiliaire. Cette transformation permet d'éviter la résolution du problème direct à chaque itération lors de la minimisation. L'originalité principale de ces méthodes provient du critère et du problème résolu. C'est pourquoi on insiste particulièrement sur ce point pour ces méthodes.

Un autre point commun est le critère d'arrêt de la minimisation. L'algorithme global est arrêté au bout d'un certain nombre d'itérations. Ce procédé est loin d'être optimal, car il est impossible de savoir *a priori* le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la convergence de l'algorithme. En effet, en procédant de la sorte, soit la convergence n'est pas atteinte soit des itérations sont effectuées de manière inutile. La différence entre les solutions trouvées par les méthodes MGM et les méthodes CSI peut provenir de la non-convergence de la méthode MGM. Etudier la convergence de la minimisation pourrait être plus efficace et rigoureux.

**Différences entre les deux méthodes** L'introduction des sources de contraste dans le critère MGM a été effectuée en 1997 (van den Berg and Kleinman, 1997) pour obtenir le critère CSI. Cependant, aucune comparaison significative entre les deux critères minimisés n'a été effectuée pour d'autres cas d'application que l'acoustique ni d'autres objets à reconstruire. De même, à notre connaissance, aucune explication n'a été réellement apportée dans la littérature pour l'introduction des sources de contraste. Cette dernière semble donner de meilleurs résultats dans le cas présenté en acoustique en l'occurrence (van den Berg and Kleinman, 1997). De plus, il se peut que l'emploi des courants de contraste  $\mathbf{w}$  modifient le conditionnement du problème. En effet, pour obtenir l'équation de couplage avec les sources de contraste, il est nécessaire de multiplier l'équation de couplage originelle par la matrice  $\mathbf{X}$ . Celle-ci contient de nombreuses lignes nulles, cette multiplication peut introduire des indéterminations.

En outre, les algorithmes de minimisation pour ces méthodes sont différents, la minimisation MGM est basée sur une estimation simultanée de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{e}$  alors qu'elle est alternée dans le cas de la minimisation CSI pour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{w}$ . En outre, l'étape de minimisation par rapport à  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{w}$  se réduit à une seule itération de gradients conjugués, limitant l'efficacité de la minimisation. Il est proposé dans (Barrière et al., 2007) d'effectuer une minimisation (tronquée ou exacte) du critère par rapport à  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{w}$  dont l'arrêt est basé sur un critère suffisamment contraignant pour effectuer plusieurs itérations. C'est cette dernière approche qui est utilisée dans cette thèse. De plus, la conjugaison des directions  $\mathbf{u}^{(n)}/\mathbf{u}^{(n-1)}$  ainsi que des directions  $\mathbf{v}^{(n)}/\mathbf{v}^{(n-1)}$  n'a pas vraiment de sens étant donné qu'ils sont calculés à des points différents.

Les méthodes de type CSI possèdent une autre faiblesse dans leur forme classique. Tout d'abord le critère à minimiser varie constamment puisque  $\lambda_{\text{CSI}}$  dépend de la solution courante.



De plus, il peut arriver pour de forts contrastes que la forme classique des méthodes de type CSI donne des solutions dégénérées (Barrière et al., 2009). Une approche proposée dans (Barrière et al., 2007) consiste à imposer  $\lambda_{\text{CSI}}$  constant au cours de la minimisation pour éviter ce phénomène. Ceci est plus proche du choix de  $\lambda_{\text{MGM}}$  qui est constant au cours des itérations.

**Généralisation** L'intérêt majeur de ces méthodes est la simplification du problème en introduisant une variable auxiliaire. Le critère non-linéaire initial est transformé en un critère bilinéaire en introduisant une variable auxiliaire. Elles ne sont appliquées qu'en tomographie de diffraction. A notre connaissance, ces méthodes n'ont jamais été généralisées dans la littérature comme méthode de résolution d'un problème non-linéaire à d'autres cas. L'avènement de la méthode CSI, *contrast source inversion* qui est fortement inspirée de la MGM, a accentué l'appartenance de cette méthode aux problèmes de tomographie de diffraction. On peut les généraliser en considérant que l'esprit de la méthode de MGM est donc de transformer un problème de minimisation d'un critère non-linéaire sous contraintes d'égalité en un problème de minimisation d'un critère composite bilinéaire en sacrifiant le respect exact de l'équation de couplage *i.e.*, sous contraintes d'inégalité. Dans tous les cas présentés d'utilisation des méthodes de type MGM/CSI, la variable auxiliaire a un sens physique (un champ électrique ou sources de contraste) mais on peut très bien introduire cette variable auxiliaire sans qu'elle ait un réel sens physique. En généralisant, on peut considérer qu'il est possible de transformer un critère non-linéaire :

$$\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{c} \right\|^2$$

avec les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{F}$  constantes ainsi que le vecteur  $\mathbf{c}$  en un critère bilinéaire :

$$\mathcal{J}_{\text{Bilin}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{e} \right\|^2 + \lambda \left\| \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{e} - \mathbf{c} \right\|^2$$

où  $\mathbf{e}$  est une variable auxiliaire dont la signification, si elle en possède une, importe peu.

On pose de manière générale :

$$\mathcal{J}_{\text{Bilin}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \lambda J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e})$$

$$J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{e} \right\|^2$$

$$J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \left\| \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{e} - \mathbf{c} \right\|^2$$

Il apparaît que  $J_1$  et  $J_2$  sont quadratiques par rapport à chacune des variables lorsque l'autre est fixée facilitant la minimisation. Cependant, on peut se demander si la bilinéarité est réellement nécessaire pour que cette méthode soit intéressante. En effet, l'intérêt majeur de cette méthode est d'éviter l'inversion d'une matrice.

**Interprétation géométrique** D'un certain point de vue, les méthodes de type MGM/CSI résolvent le problème suivant :

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{e})} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \text{ s.c. } J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \leq \epsilon_c \quad (\text{I.16})$$

où  $\epsilon_c$  dépend de  $\lambda$ . La traduction géométrique du problème résolu est illustrée à la figure I.3.

On voit sur cette figure, les courbes de niveau de la quadratique  $J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  ainsi que l'hyperbole  $J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = 0$  représentée par le trait plein. Lorsque c'est le problème sous contraintes de couplage qui est résolu, la solution est le minimum de la quadratique le long de l'hyperbole. Les méthodes de type MGM/CSI minimisent le problème sans contraintes, la solution recherchée est toujours le minimum de la quadratique mais dans un tube centré autour de l'hyperbole. Le rayon du tube dépend de la valeur de  $\lambda$  et ses limites sont représentées par les pointillés. Cependant, il est difficile *a priori* de savoir quelle est la valeur de  $\epsilon_c$  en connaissant  $\lambda$ . Lorsque  $\lambda$  augmente, le rayon diminue. D'après (van den Berg and Abubakar, 2001) choisir  $\lambda$  suffisamment élevé permet de limiter l'existence de ces minima et le choix de  $\lambda_{\text{CSI}}$  proposé par les méthodes de type CSI permet de

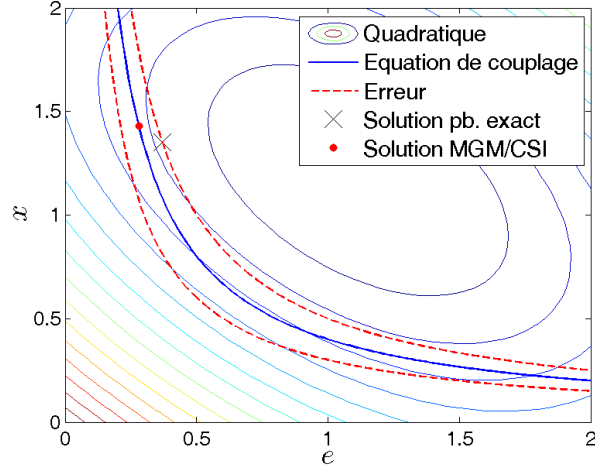


FIG. I.3 – Critères avec ou sans contraintes de couplage

s'assurer que  $\lambda$  est suffisamment élevé. Plus  $\lambda$  est élevé et plus le rayon du tube est petit. De plus, le critère n'est pas nécessairement convexe, il peut donc exister des minima locaux aux critères MGM et CSI comme le montre l'exemple pris à la figure I.3. Les méthodes de type MGM/CSI ne sont pas des méthodes de minimisation globale, les solutions peuvent être n'importe lequel des minima locaux.

### I.2.5.c Régularisation dans les méthodes de type MGM/CSI

La tomographie de diffraction est un problème mal-posé. L'existence d'une solution ne pose en général pas de difficulté (Devaney and Sherman, 1982). *A contrario* l'unicité et la stabilité d'une solution ne sont pas du tout assurées. En effet, en général  $m < n$ , le système est donc sous-déterminé *i.e.*, il y a plus d'inconnues à estimer que de données ou d'équations à disposition, l'unicité n'est donc pas assurée. De plus, des problèmes de stabilité peuvent se poser lorsque des points de l'espace ont un très faible impact sur les données (Colton and Kress, 1992). En effet, dans le cas des CF, à cause de la dissipation des ondes électromagnétiques dans les matériaux conducteurs, les courants de Foucault sont très localisés à la surface de la plaque métallique. Les points de l'espace en profondeur (par rapport à la profondeur de peau) ont donc peu d'influence sur les champs électromagnétiques dans la plaque et autour de la plaque. Par exemple, une forte variation de conductivité en profondeur a un impact négligeable sur les données mesurées. La condition de stabilité n'est donc pas assurée.

Le caractère mal-posé du problème incite à introduire de la régularisation. La forme la plus classique de régularisation, la régularisation de Tikhonov, est utilisée pour la tomographie de diffraction (Barrière et al., 2008; Carfantan and Mohammad-Djafari, 1997a). Cependant, elle est connue pour donner des solutions lisses et n'est pas très efficace pour des objets avec des bords francs, or les contrastes à retrouver sont en général constants par morceaux. Dans ce cas, en général, la régularisation classiquement utilisée est un terme de régularisation additif basé sur la variation totale (Rudin and Osher, 1994). La méthode CSI est également régularisée grâce à l'introduction d'un terme de variation totale. Il peut être sous forme additive (van den Berg and Kleinman, 1995, 1997), cependant la variation totale est souvent introduite sous forme multiplicative (Abubakar et al., 2001, 2005; Abubakar and van den Berg, 2004). La méthode est alors dénommée *multiplicative regularised-contrast source inversion* (MR-CSI). Bien qu'utiliser un terme additif (Barrière et al., 2009; Carfantan, 1996; Idier, 2008) dans le critère minimisé soit beaucoup plus classique dans la résolution de problèmes inverses que la forme multiplicative. La méthode MR-CSI s'est

imposée comme la méthode CSI de référence.

Afin d'obtenir des solutions physiquement acceptables, une contrainte de positivité peut être ajoutée au problème. Une méthode utilisée et naturelle (Abubakar and Van Den Berg, 2001) est de projeter la solution dans l'espace de solutions recherchées *i.e.*, d'imposer aux composantes négatives de  $\mathbf{x}$  d'être nulles au cours de la minimisation. Cette méthode de minimisation s'apparente aux *feasible direction methods* (Bertsekas, 1999). Cependant, ces méthodes pour minimiser un critère sous contraintes de positivité ne sont pas les plus efficaces.

Les connaissances *a priori* sur l'objet peuvent être également plus précises et il est possible de considérer que les valeurs prises par  $\mathbf{x}$  sont bornées, entre 0 et 1 pour fixer les idées. Il est proposé dans (Prémel and Mohammad-Djafari, 1995) d'utiliser des lois *a priori* Bêta afin de forcer les valeurs à appartenir à cet intervalle. Cependant, en théorie, bien que plus probables les valeurs 0 et 1 ne peuvent être exactement prises. Il est également proposé d'effectuer un changement de variable (Dos Reis et al., 2002; Monebhurrin, 1997; Souriau et al., 1996)  $\mathbf{x} = 1 / (1 + \exp \{\boldsymbol{\tau} / \theta\})$  afin de forcer les valeurs à appartenir à un intervalle donné voire même de les forcer à être binaires à l'aide d'un paramètre intervenant dans le changement de variable. Il est également possible de travailler avec des variables strictement binaires (Nikolova and Mohammad-Djafari, 1996) mais ceci pose des difficultés pour la minimisation.

### I.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des généralités sur les problèmes inverses ont été présentées ainsi que les difficultés qui peuvent se poser lors de leur résolution. La plupart de ces problèmes sont mal-posés et nécessitent l'introduction d'informations *a priori* afin d'obtenir des solutions admissibles. Ces informations *a priori* dépendent du problème et de la forme générale de l'objet recherché. Une loi *a posteriori* est obtenue. Celle-ci contient les données et les informations *a priori* sur l'objet à reconstruire. Il est important de choisir judicieusement la manière d'introduire ces informations. En effet, la loi *a priori* a un impact important sur les objets reconstruits. Une fois la loi *a priori* choisie, il est nécessaire de choisir un estimateur à partir de la loi *a posteriori*. Dans notre cas, le maximum *a posteriori* est choisi car il est très classique et plus facile à obtenir.

On a également présenté les méthodes les plus classiques pour résoudre le problème de diffraction. Il existe des méthodes très utilisées pour résoudre le problème tout en contraignant l'équation de couplage telles que les différentes méthodes de Born notamment la méthode de Born distordue (connue aussi sous le nom de méthode de Newton-Kantorovich). Cependant, ces dernières nécessitent la résolution répétée du modèle direct, opération généralement longue et coûteuse. Il existe également les méthodes de type MGM/CSI très utilisées pour la tomographie micro-ondes (Barrière et al., 2008; Carfantan, 1996; van den Berg and Abubakar, 2001) mais peu dans le cas des CF (Dos Reis et al., 2002). Elles peuvent se traduire comme un problème de minimisation bilinéaire sans contrainte en relâchant l'équation de couplage. Quelle que soit la méthode de résolution de tomographie de diffraction employée, force est de constater que la grande majorité d'entre elles nécessitent l'emploi d'un modèle direct basé sur les équations électromagnétiques, ce qui manque à la méthode EDF-EPM.

On peut également noter que généralement les méthodes de type MGM/CSI sont utilisées avec un modèle direct basé sur une formulation intégrale (van den Berg and Abubakar, 2001). Cependant, ces dernières années, ces méthodes ont été adaptées pour utiliser un modèle basé sur une formulation différentielle (Abubakar et al., 2008a; Trillon et al., 2009) car les modèles intégraux nécessitent différentes conditions pour être utilisables. La plus contraignante d'entre elles est la nécessité d'avoir un problème ayant une géométrie canonique (espace libre, tube ou plaque). Jusqu'à présent, uniquement des modèles *différences finies* (DF) (Abubakar et al., 2008a,b; van den Berg et al., 2009) au lieu de modèles intégraux ont été utilisés avec ce type de méthodes. Les modèles *éléments finis* (EF) n'ont jamais été employés avec ces méthodes d'inversion bien qu'ils soient très classiques en modélisation numérique.

Première partie

Modèle direct



# Introduction

La méthode EDF-EPM en 3D (Dubost et al., 2006; Goussard and Guichard, 2007) fournit de manière assez efficace des reconstructions sous certaines contraintes de largeur de l'entaille à reconstruire, notamment pour les défauts de 0,2 mm de largeur. Néanmoins, pour des défauts n'appartenant pas à cette classe, cette méthode est beaucoup moins efficace (Dubost and El-Guedri, 2008). En effet, il y a une ambiguïté dans les reconstructions entre largeur et profondeur de défauts. Cette indétermination peut être levée en se limitant à des défauts d'une certaine largeur. Le facteur limitant l'efficacité de la méthode de reconstruction des défauts semble être le modèle linéaire identifié et exploité dans la méthode (Dubost and El-Guedri, 2008). Afin d'obtenir des reconstructions plus proches du défaut à reconstruire, on cherche à développer des méthodes d'inversion utilisant un modèle direct basé sur les équations physiques permettant de simuler des données CF pour une plaque avec un défaut connu.

Les modélisations possibles pour obtenir un modèle direct sont diverses : variables électromagnétiques utilisées, formulation (intégrale/différentielle), méthode de discrétisation, etc... Il est difficile de faire la différence entre toutes les possibilités et de faire un choix. Pour cette raison, on s'inspire tout d'abord des modèles et méthodes proposés dans la littérature pour la tomographie de diffraction en général pour l'appliquer à la reconstruction tomographique par CF.

En général, en modélisation, la principale qualité d'un modèle est sa précision par rapport à la réalité. Cependant, plus le modèle précis et plus il est complexe. Notre objectif est très différent puisqu'il s'agit de développer un modèle direct CF pour l'inversion. Dans notre cas, la principale qualité recherchée pour le modèle est la simplicité tout en ayant un minimum de précision. L'inversion nécessite en général la résolution du modèle direct pour un objet donné. Un modèle très précis nécessitant des heures de calcul pour sa résolution est un mauvais candidat car l'inversion risque d'être extrêmement longue et nécessiter des opérations complexes. A l'inverse, un modèle trop grossier mais rapide et simple à mettre en œuvre ne peut donner des résultats d'inversion fiables. La difficulté est donc de trouver un modèle qui présente un compromis entre difficultés d'implémentation, temps de calcul et mémoire nécessaires mais également précision.

Les méthodes intégrales sont les plus utilisées pour la modélisation en tomographie de diffraction. Ces méthodes permettent de ne discrétiser que les zones d'intérêt de l'espace (uniquement le défaut par exemple pour simuler des données et non un domaine plus grand). Cependant, elles font intervenir des fonctions de Green qui sont des solutions semi-analytiques de l'équation d'Helmholtz. Ces méthodes discrétisent la solution de l'équation d'Helmholtz. De plus, après discrétisation, les matrices de Green intervenant sont pleines. A l'inverse, les méthodes différentielles ne font intervenir que des matrices creuses car elles résolvent l'équation d'Helmholtz discrétisée. Enfin, ces fonctions de Green ne sont connues que pour des géométries canoniques (tube, plaque, milieu libre, etc.) et sont singulières. C'est pourquoi on choisit d'utiliser ces dernières pour obtenir un modèle de propagation d'une onde électromagnétique.

On débute notre étude avec le développement d'un modèle différences finies afin de valider les méthodes d'inversion proposées. L'objectif à long terme est de pouvoir utiliser ces méthodes avec des données réelles pour la reconstruction de défauts 3D. Une telle modélisation n'est pas suffisante pour prendre en compte certains phénomènes tels que les discontinuités en champs électrique ou magnétique à l'interface d'éléments ayant des conductivités différentes. De plus, cette modélisation

---

ne permet pas non plus de discrétiser précisément des géométries plus complexes tels que les tubes, les disques, tout type de géométrie de manière générale.

La méthode des éléments finis est la méthode différentielle la plus courante en modélisation : électromagnétisme, mécanique, hydrodynamique, etc. En effet, elle est très flexible pour la discrétisation du domaine de calcul. Enfin, il est plus facile de prendre en compte la continuité du champ électromagnétique aux interfaces de changement de milieu.

Le problème de tomographie par courants de Foucault est résolu en étudiant deux sous-problèmes distincts : la modélisation et l'inversion. Ces sous-problèmes sont traités par deux communautés scientifiques différentes. Ce manuscrit s'adresse à ces deux communautés, il est donc possible que certains points traités dans la suite puissent paraître « triviaux » pour certains et soient nouveaux pour d'autres. On remercie donc le lecteur pour sa compréhension.

Dans un premier temps, au chapitre II, on explicite les lois physiques régissant l'électromagnétisme et la propagation d'une onde électromagnétique. De plus, deux modélisations employées dans la littérature sont détaillées dans ce manuscrit. Cependant celles-ci ne seront pas retenues par la suite. La première est le modèle direct linéaire estimé employé par la méthode EDF-EPM qui doit être amélioré. La seconde est la formulation intégrale, très employée en tomographie de diffraction, mais dont l'utilisation dans un cadre industriel et appliqué est difficilement envisageable. Par la suite, au chapitre III, un modèle différences finies est développé pour débiter l'étude de l'inversion CF. Ce modèle souffre de plusieurs lacunes, notamment il est inexploitable pour la tomographie CF en 3D. C'est pourquoi, par la suite des modèles éléments finis sont étudiés au chapitre IV. Ce modèle EF proposé est très classique. Selon ce modèle, le champ électrique aux nœuds du maillage triangulaire est calculé.

## Chapitre II

# Equations électromagnétiques pour les courants de Foucault

### Sommaire

II.1	Généralités en électromagnétisme . . . . .	<b>34</b>
II.1.1	Equations de Maxwell . . . . .	35
II.1.2	Changement de milieu . . . . .	35
II.1.3	Equation d'Helmholtz . . . . .	36
II.2	Modèle linéaire utilisé dans la méthode EDF-EPM . . . . .	<b>37</b>
II.2.1	Principe . . . . .	37
II.2.2	Simulation . . . . .	39
II.2.3	Conclusion . . . . .	39
II.3	Méthodes intégrales . . . . .	<b>41</b>
II.3.1	Principe . . . . .	41
II.3.2	Discretisation par méthode des moments . . . . .	42
II.3.3	Conclusion sur les méthodes intégrales . . . . .	43
II.4	Variation d'impédance . . . . .	<b>43</b>
II.5	Conclusion . . . . .	<b>44</b>

Afin de résoudre le problème d'inversion de données courants de Foucault, la plupart des méthodes utilisent un modèle direct liant la distribution d'une grandeur physique représentative du défaut (la conductivité ou la conductivité relative par exemple) et la variation d'impédance mesurée aux bornes de la bobine. Le modèle direct est en général basé sur la résolution des équations de Maxwell même si quelques méthodes proposent l'identification d'un modèle simplifié à l'aide de données pour des défauts connus (Davoust et al., 2006; Dubost et al., 2006).

Dans ce chapitre, on présente brièvement la théorie de l'électromagnétisme et notamment les équations de Maxwell qui permettent de décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu, l'équation d'Helmholtz. L'objectif final de cette partie est, ici, de simuler, de manière simple et exploitable pour l'inversion, le calcul de la variation d'impédance pour un défaut donné. Parmi les modélisations présentes dans la littérature, deux modèles directs sont présentés : le premier, utilisé à EDF pour la tomographie par CF (Dubost et al., 2006) et le second, très utilisé en tomographie de diffraction (van den Berg and Abubakar, 2001). Il s'agit d'étudier ces modèles et de lister les avantages afin de décider de la pertinence de leur utilisation dans un cadre industriel.



## II.1 Généralités en électromagnétisme

On cherche à développer un modèle direct pour calculer la variation d'impédance d'un capteur survolant une plaque métallique avec défaut comme le montre le schéma de la figure II.1. Les conditions de simulations sont présentées à l'annexe B.

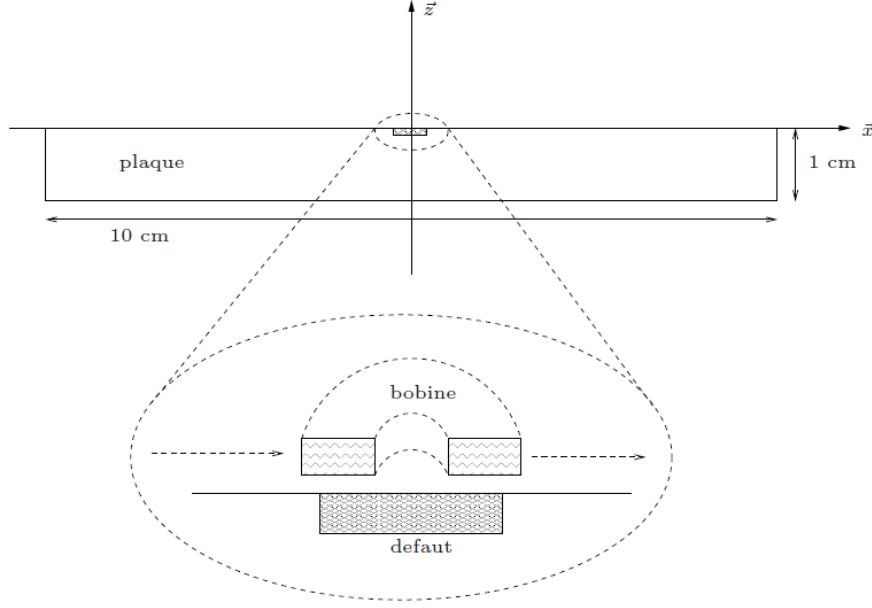


FIG. II.1 – Disposition du capteur

On pose par convention :

- l'axe  $\vec{x}$  est horizontal et orienté de la gauche vers la droite ;
- l'axe  $\vec{z}$  est vertical et orienté de bas en haut avec  $z = 0$  le haut de la plaque ;
- l'origine  $O$  se situe au centre de la plaque à l'interface air/métal ;
- l'axe  $\vec{y}$  de telle sorte que  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est un trièdre orthonormé direct.

La bobine parcourue par un courant alternatif engendre des courants induits dans la plaque métallique appelés *courants de Foucault*. En l'absence de défaut, les courants circulent selon un parcours précis. Lorsqu'il y a un défaut, la circulation des courants est perturbée, ce qui modifie l'impédance aux bornes de la bobine. Cette impédance est mesurée dans le but d'obtenir des informations sur le défaut dans la plaque et est comparée à l'impédance du capteur lorsqu'il n'y a pas de défaut.

Une étape importante dans la littérature (Kleinman and van den Berg, 1992; Silvester and Ferrari, 1996) pour calculer la variation d'impédance d'une bobine est le calcul de la distribution d'une ou plusieurs variables électromagnétiques dans le domaine de calcul. Dans notre cas, le champ électrique  $\vec{E}$  est employé car cela est plus habituel lorsque le domaine de calcul n'est pas magnétique. Cependant rien n'interdit l'utilisation du champ magnétique  $\vec{H}$ . De plus, on considère que seule la conductivité du matériau varie au niveau du défaut. En effet, seuls les manques de matière sont pris en compte, les défauts de corrosion et les dépôts de matière ne sont pas étudiés.

### II.1.1 Equations de Maxwell

Les équations de la physique régissant les champs électromagnétiques sont les équations de Maxwell (Harrington, 1993) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

$\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{B}$  est l'induction magnétique,  $\vec{H}$  le champ magnétique,  $\vec{D}$  l'induction électrique et  $\vec{J}$  la densité de courant électrique. On pose  $\vec{r} = (x, z)$  en 2D ou  $\vec{r} = (x, y, z)$  en 3D. Ce problème est un problème *équations aux dérivées partielles* (EDP). Compte tenu du courant alternatif circulant dans la bobine, on se place en régime harmonique, ce qui signifie que les champs ont la forme suivante :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}$$

Les équations de Maxwell deviennent alors pour le régime harmonique :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + j\omega \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega \vec{D} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

En faisant les hypothèses classiques de linéarité, de non-dispersion et d'isotropie, les relations constitutives suivantes sont obtenues :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.1})$$

avec  $\epsilon$  la permittivité diélectrique,  $\mu$  la perméabilité magnétique et  $\sigma$  la conductivité électrique du matériau considéré. Les hypothèses formulées sous-entendent que  $\epsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des grandeurs réelles. Soient  $\epsilon_0$  la permittivité du vide et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Dans notre cas, on pose  $\epsilon = \epsilon_0$  et on considère que le milieu est amagnétique donc  $\mu = \mu_0$  dans tout le domaine, que ce soit dans l'air ou le matériau.

### II.1.2 Changement de milieu

Dans notre cas, il y a un changement de milieu représenté par une forte variation de la conductivité entre l'air et la plaque métallique. En appelant  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $S$  l'interface air/métal,  $\vec{X}_1$  le champ  $\vec{X}$  dans l'air et  $\vec{X}_2$  le champ  $\vec{X}$  dans le métal, on a (Silvester and Ferrari, 1996) :

1.  $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ ;
2.  $\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$  avec  $\rho_S$  la densité surfacique de charge à l'interface  $S$ ;
3.  $\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$  avec  $\vec{J}_S$  la densité surfacique de courant à l'interface  $S$ ;
4.  $\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ .

Physiquement, on peut expliquer plus intuitivement les équations précédentes :

1. la composante tangentielle du champ électrique à l'interface est continue ;
2. la composante normale de l'induction électrique à l'interface est discontinue et dépend des charges surfaciques à l'interface ;
3. la composante tangentielle du champ magnétique à l'interface est discontinue et dépend du courant surfacique à l'interface ;
4. la composante normale de l'induction magnétique à l'interface est continue ;

Ces conditions de passage sont importantes pour la suite car chaque méthode de modélisation peut plus ou moins facilement prendre en compte ces contraintes. Elles sont discriminantes pour la modélisation à adopter pour résoudre le problème.

### II.1.3 Equation d'Helmholtz

On fait l'hypothèse du cas 2D transverse magnétique plus simple pour débiter l'étude d'inversion. Dans ce cas, la bobine ne peut pas représentée. De plus, les défauts sont donc de longueur infinie dans la direction  $\vec{y}$ .

Le champ électrique a donc uniquement une composante non nulle suivant l'axe  $\vec{y}$ , on ne considère plus le vecteur  $\vec{E}$  mais la composante de ce vecteur suivant l'axe  $\vec{y}$ , scalaire que l'on note  $E = \vec{E} \cdot \vec{y}$ . En utilisant des formules de géométrie différentielle telles que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Les équations de Maxwell peuvent s'écrire sous la forme d'une équation de propagation, dite *équation d'Helmholtz* (Zorgati, 1998) :

$$\Delta E(x, z) + k^2(x, z) E(x, z) = j\omega\mu_0 J(x, z)$$

$$k^2(x, z) = \omega^2\mu_0\epsilon_0 - j\omega\mu_0\sigma(x, z)$$

$$J(x, z) = \begin{cases} \pm J_c & \text{si } (x, z) \in D_\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La définition du Laplacien en 2D est la suivante :

$$\Delta E = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E(x, z)$$

On appelle :

- $\Omega$  le domaine de calcul ;
- $D_1$  l'air ;
- $D_2$  la plaque métallique ;
- $D_\ell$  la bobine (courant source).

Dans l'équation d'Helmholtz,  $\sigma(x, z)$  est la conductivité au point  $(x, z)$  et  $J(x, z)$  est la densité du courant en ce même point.

$$\sigma(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, z) \in \text{air/défaut} \\ \sigma_0 & \text{si } (x, z) \in \text{métal sain} \end{cases}$$

Une densité de courant  $J(x, z)$  uniforme circule dans la bobine et est égale à  $J_c$ , l'effet de peau dans les fils de la bobine est donc négligé. Cette hypothèse est parfaitement justifiée : une bobine est généralement constituée de plusieurs tours de fil très fin uniformément répartis sur la section. L'intensité du courant parcourant la bobine est appelé  $I_0$  et  $S$  la section du fil de la bobine constituée de  $N$  tours :

$$J_c = \frac{N \times I_0}{S}$$

Compte tenu de la fréquence de travail du courant dans la bobine (de l'ordre de la centaine de kHz) et de la conductivité de la plaque (de l'ordre de millions de  $\text{S.m}^{-1}$ ), on peut faire l'approximation quasi-statique. Celle-ci revient à négliger les courants de déplacement  $\vec{D}$  dans le domaine représenté. Le terme  $\omega^2\mu_0\epsilon_0$  est de l'ordre de  $10^{-8}$  ce qui est négligeable par rapport aux autres termes de l'équation ( $\Delta E$ ,  $E$  et  $\omega\mu_0\sigma(x, z)$ ). Avec l'approximation quasi-statique, quel que soit le domaine,

$$k^2(x, z) = -j\omega\mu_0\sigma(x, z)$$

l'équation de propagation devient une équation de diffusion (Kriezis et al., 1992) :

$$\Delta E(x, z) - j\omega\mu_0\sigma(x, z) E(x, z) = j\omega\mu_0 J(x, z) \quad (\text{II.2})$$

L'équation d'Helmholtz avec le champ électrique figure parmi les plus utilisées pour résoudre les problèmes de modélisation de courants de Foucault pour l'inversion. Il existe différentes manières

de décrire ces problèmes en faisant intervenir le champ magnétique  $\vec{H}$  ou des potentiels comme le vecteur potentiel magnétique  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire électrique  $V$ .

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Il est à noter que les potentiels permettent de décrire de manière unique (lorsqu'une jauge est choisie) le champ électromagnétique. Les potentiels sont très étudiés dans la littérature car ils peuvent avoir un impact sur :

1. le conditionnement du problème (Wu et al., 2007) ;
2. le nombre d'inconnues à résoudre (Silvester and Ferrari, 1996). Par exemple, dans certains cas, un potentiel scalaire électrique est suffisant pour décrire de manière unique le champ électrique  $\vec{E}$ , permettant ainsi de diminuer grandement le nombre d'inconnues, notamment dans les régions où il n'existe aucun courant.

Toutefois, l'utilisation des potentiels n'est pas détaillée davantage, le lecteur désireux d'avoir plus de détails est reporté à la lecture d'ouvrages spécialisés tels que (Silvester and Ferrari, 1996).

Dans ce chapitre, différents modèles, présents dans la littérature mais qui ne seront pas retenus par la suite, sont présentés. On commence par présenter le modèle actuellement étudié par EDF (Dubost et al., 2006), puis le modèle par formulation intégrale.

## II.2 Modèle linéaire utilisé dans la méthode EDF-EPM

La méthode EDF-EPM a été développée dans le cadre de partenariats entre EDF et l'Ecole Polytechnique de Montréal (EPM) depuis 2001 (Goussard and Guichard, 2001). On la présente afin de mettre davantage en évidence les faiblesses de cette méthode motivant ainsi le lancement de cette thèse. Les méthodes développées ont évolué mais le principe général est resté inchangé depuis le début. La méthode se divise en deux phases :

1. identification du modèle linéaire direct de *réponse impulsionnelle* (RI)  $\mathbf{h}$  à l'aide de données connues  $\Delta \mathbf{Z}$  pour des défauts connus  $\mathbf{x}$  : on impose  $\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{h}$  ;
2. reconstruction d'un défaut inconnu à partir de mesures connues et du modèle linéaire identifié.

Chaque phase résout un problème (identification ou reconstruction) par minimisation d'un critère adapté.

La première phase de cette méthode est présentée dans ce paragraphe, la phase d'identification du modèle linéaire. La seconde phase, la phase de reconstruction, est brièvement présentée au chapitre I. Le lecteur désireux d'avoir davantage de détails sur cette dernière est reporté à la lecture de (Goussard and Guichard, 2007).

### II.2.1 Principe

Dans le cas 3D, l'objet à reconstruire est divisé en  $L$  couches différentes. Il s'agit de retrouver la distribution de la conductivité relative car :

- une baisse de la conductivité montre un manque de matière ;
- les données sont sensibles à la conductivité.

Le vecteur contenant l'ensemble des contrastes des pixels est appelé  $\mathbf{x}$ . Celui-ci contient les contrastes :

$$\mathbf{x}(k) = \frac{\sigma_0 - \sigma(k)}{\sigma_0}$$

avec  $\sigma(k)$  la valeur de la conductivité du pixel  $k$  dans le domaine de calcul.

On considère que  $\Delta \mathbf{Z} = \sum_{\ell=1}^L \Delta \mathbf{Z}_\ell$  avec  $\Delta \mathbf{Z}_\ell$  la contribution de la  $\ell^{\text{ème}}$  couche aux données. L'hypothèse suivante est formulée : la contribution  $\Delta \mathbf{Z}_\ell$  aux données de la  $\ell^{\text{ème}}$  couche est égale au

produit de convolution 2D entre la conductivité relative de la couche  $\ell$  et une réponse impulsionnelle 2D  $\mathbf{h}_\ell$ . Le modèle obtenu correspond à un filtre. En sommant l'ensemble des contributions des couches pour les données, le modèle linéaire peut être écrit sous la forme suivante :

$$\Delta \mathbf{Z} = \mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{h}$$

Pour la méthode EDF-EPM il est nécessaire d'estimer un modèle linéaire  $\mathbf{H}$ , c'est un problème d'identification. Comme expliqué dans le paragraphe précédent, dans les différents partenariats, l'approche la plus utilisée pour estimer la matrice  $\mathbf{H}$  est la minimisation d'un critère. Il est important de bien choisir le critère. Le plus naturel est un critère des moindres carrés (Goussard and Guichard, 2001, 2004) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{h}) = \|\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{X} \mathbf{h}\|^2 \quad (\text{II.3})$$

Pour minimiser ce critère, une solution analytique peut être trouvée telle que  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{h}) = 0$  :

$$\mathbf{h} = (\mathbf{X}^\dagger \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \Delta \mathbf{Z}$$

Dans un cas tel que le nôtre, les matrices sont très grandes au point que les inversions de matrices employées sont très coûteuses en temps et en mémoire. On préfère dans ce cas avoir recours à des algorithmes de minimisation.

Cependant, le réel problème réside dans la sous-détermination du système : il y a plus d'inconnues à trouver que d'équations. La solution pour un tel système n'est pas unique. Par conséquent, rien ne garantit que les solutions obtenues soient les bonnes ni qu'elles soient cohérentes avec la réalité physique. Ceci est confirmé par l'expérience car en pratique, un tel critère n'est pas suffisamment efficace pour obtenir des réponses impulsionnelles suffisamment correctes pour être exploitables. Il est nécessaire d'introduire des *a priori* sur la RI  $\mathbf{h}$  pour pouvoir améliorer les résultats. Pour cela la fonction  $\Phi(\mathbf{h})$  est introduite. Le critère devient (Goussard and Guichard, 2004) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{h}; \lambda) = \|\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{X} \mathbf{h}\|^2 + \lambda \Phi(\mathbf{h}) \quad (\text{II.4})$$

$\lambda$  est un hyperparamètre qui permet de pondérer l'importance accordée aux *a priori* par rapport au terme d'adéquation aux données. Il est estimé par essais et erreurs.

On cherche à avoir une réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}$  qui soit continue. Pour cela, il faut pénaliser les discontinuités et donc que la fonction  $\Phi(\mathbf{h})$  prenne en compte les discontinuités et les pénalise fortement. Pour cela, il est nécessaire de faire intervenir les différences finies dans la fonction  $\Phi(\mathbf{h})$ . Les matrices  $\mathbf{D}^{(m)}$  désignent les matrices de différences finies dans la direction  $m$  (1 : direction  $\vec{x}$  et 2 : direction  $\vec{y}$ ). Autrement dit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{h})(i, j) &= h(i+1, j) - h(i, j) \\ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{h})(i, j) &= h(i, j+1) - h(i, j) \end{aligned}$$

De plus, un terme de rappel à 0 est ajouté sur les valeurs du vecteur  $\mathbf{h}$  car plus un pixel est éloigné du point de mesure et moins il a d'impact sur les données. De plus, il a été observé que la RI n'était pas nulle aux bords, ce terme de rappel à 0 permet d'éviter ce phénomène incohérent avec ce qui est attendu *a priori*. Pour faciliter l'écriture et la lecture, on pose l'opérateur  $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}$ , ainsi :

$$\Phi(\mathbf{h}) = \sum_{m=0}^2 \beta_m \phi(\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{h}) \quad (\text{II.5})$$

avec  $\phi(u)$  une fonction de pénalisation et les coefficients  $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2\}$  des coefficients de pondération ou hyperparamètres. Ces hyperparamètres ont une influence sur la forme de la RI et notamment sur les discontinuités qui pourraient se produire dans une direction par rapport à une autre (Goussard and Guichard, 2007) :

- $\beta_0$  a un effet sur l'énergie totale de la RI ;

- $\{\beta_1, \beta_2\}$  ont un effet sur la douceur de la RI dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . La RI est anisotrope si  $\beta_1 \neq \beta_2$ .

On cherche à favoriser les réponses impulsionnelles continues, pour cela une fonction de pénalisation quadratique est utilisée pour le champ de Markov. Il en est de même pour l'énergie de la RI. Etant donné que la fonction de pénalisation est quadratique, le critère reste quadratique et donc convexe. Ce dernier point nous permet de nous assurer qu'il y a un unique minimum global.

Finalement, on a le critère suivant à minimiser (Goussard and Guichard, 2004) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{h}; \lambda, \beta) = \|\Delta \mathbf{Z} - \mathbf{X} \mathbf{h}\|^2 + \lambda \sum_{m=0}^2 \beta_m \|\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{h}\|^2 \quad (\text{II.6})$$

Le critère reste quadratique grâce à la régularisation de Tikhonov. L'expression analytique du minimum peut être trouvée telle que  $\nabla \mathcal{J}(\mathbf{h}; \lambda, \beta) = 0$ . La solution obtenue est la suivante :

$$\mathbf{h} = \left( \lambda \sum_{m=0}^2 \beta_m \left( \mathbf{D}^{(m)} \right)^\dagger \mathbf{D}^{(m)} + \mathbf{X}^\dagger \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^\dagger \Delta \mathbf{Z}$$

Cependant, pour des raisons de temps et d'espace mémoire, cette solution analytique n'est pas exploitée. Utiliser un algorithme de minimisation, tel que la méthode des gradients conjugués linéaire, est préférable pour obtenir le minimum du critère.

## II.2.2 Simulation

Le modèle 2D EDF-EPM est testé en simulant un capteur au-dessus d'une plaque avec un défaut de 1 mm de profondeur et 5 mm de largeur. Pour cela, le capteur décrit au chapitre VII est simulé.

La conductivité  $\sigma_0$  est choisie égale à celle des plaques étudiées dans les différents rapports (Dubost and El-Guedri, 2008), en effet on impose :  $\sigma_0 = 1.39 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ .

Pour utiliser la méthode présentée, il est nécessaire d'utiliser un ensemble de défauts  $\mathbf{x}$  dont on connaît les données CF  $\Delta \mathbf{Z}$  pour identifier la RI  $\mathbf{h}$  du modèle linéaire. L'ensemble d'apprentissage suivant est utilisée (cf. annexe A) :

1. un défaut carré de 1 mm de largeur et 1 mm de profondeur ;
2. un défaut profond de 4 mm de largeur et 3 mm de profondeur ;
3. un défaut de 5 mm de largeur et de 1 mm de profondeur ;
4. un défaut transverse de 0,6 mm de largeur et de 1,4 mm de profondeur.

On simule les données sur le défaut de 1 mm de profondeur présenté à la figure II.2.

Le logiciel commercial COMSOL est employé afin d'évaluer le modèle linéaire identifié. COMSOL utilise une formulation mixte  $\vec{A} - V$  : potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  qui est scalaire en 2D et potentiel scalaire électrique  $V$ . Des éléments nodaux de Lagrange d'ordre 2 sont employés pour la discrétisation. Les données CF simulées par COMSOL sont considérées comme des références car indépendantes de tous les modèles étudiés et implémentés dans ce manuscrit. Les résultats de simulation sont présentés à la figure II.3.

On remarque à la figure II.3 une différence assez importante entre les données simulées avec le modèle linéaire identifié et les données simulées à l'aide de COMSOL. Il est également à noter que le défaut simulé fait partie de l'ensemble d'apprentissage utilisé pour la réponse impulsionnelle. Ceci prouve que le modèle n'est pas robuste pour la suite confirmant le rapport (Dubost and El-Guedri, 2008), qui conclut que le modèle linéaire peut être une explication aux limites de la méthode EDF-EPM.

## II.2.3 Conclusion

La méthode EDF-EPM a été présentée dans cette section. Cette méthode a pour avantage d'être simple car elle ne nécessite pas d'étudier et ni de comprendre la physique du problème. Elle

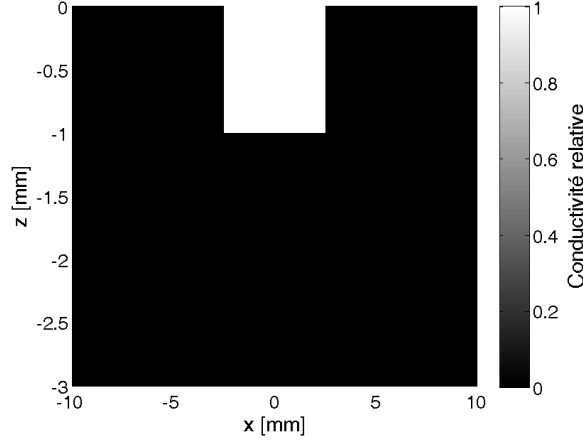


FIG. II.2 – Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm

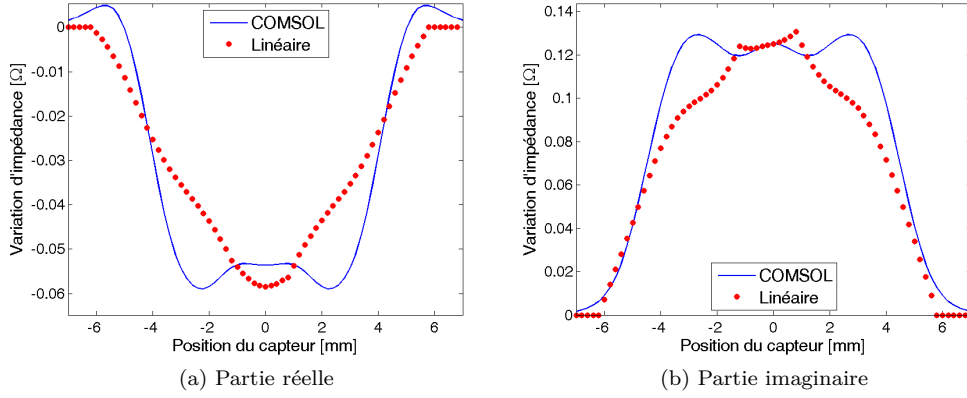


FIG. II.3 – Données simulées avec modèle linéaire en comparaison avec COMSOL : parties réelle (a) et imaginaire (b)

se base sur un modèle simple et connu en inversion : le modèle linéaire. De plus, aucune variable électromagnétique n'intervient, évitant ainsi des problèmes de mémoire et de temps de calcul pour l'évaluation de ces variables. En outre, il n'est pas nécessaire de modéliser le capteur ou les champs électromagnétiques. Tout ceci est implicitement compris dans la RI  $\mathbf{h}$  identifiée.

Cependant, l'inconvénient majeur de cette méthode est sa précision. Tout d'abord, une approximation forte de la physique pour obtenir la linéarité des équations est explicitement faite entraînant des erreurs de modèle. Compte tenu des hypothèses effectuées sur la RI avec la méthode EDF-EPM (séparabilité, invariance selon l'axe, etc.), le modèle linéaire de la méthode EDF-EPM n'est pas exactement le même que celui obtenu avec l'approximation de Born forte. L'approximation de Born forte implique un modèle direct linéaire  $\Delta Z = \mathbf{G}_{12} \mathbf{E}_0 \mathbf{x}$ . À l'inverse un modèle linéaire  $\mathbf{H}$  identifié n'est pas nécessairement identique à  $\mathbf{G}_{12} \mathbf{E}_0$ . Même si ces deux méthodes ont un modèle direct linéaire, ce point commun n'est pas suffisant pour pouvoir affirmer que les modèles sont équivalents. En outre, le modèle est estimé provoquant également des erreurs d'estimation puisqu'il y a plus d'inconnues que de données. L'inversion dépend ainsi fortement du modèle direct identifié.

Etant donné les médiocres performances du modèle direct identifié, d'autres pistes sont explorées pour obtenir un modèle direct qui ne serait ni identifié ni linéaire. Il existe différentes méthodes afin de résoudre cette équation. On distingue cependant deux grandes classes de méthodes :

- les méthodes intégrales basées sur l'utilisation de fonctions de Green, solutions élémentaires de l'équation d'Helmholtz discrétisées ;
- les méthodes différentielles basées sur une résolution de l'équation d'Helmholtz discrétisée.

On présente brièvement la modélisation la plus souvent adoptée dans le cadre de l'inversion en tomographie de diffraction, soit la formulation intégrale.

## II.3 Méthodes intégrales

Pour modéliser les problèmes de distribution d'un champ électromagnétique dans l'espace, les méthodes intégrales sont très souvent utilisées. Elles sont détaillées dans cette section. Elles sont basées sur la discrétisation de l'équation d'Helmholtz résolue. L'équation d'Helmholtz est résolue à l'aide de fonctions de Green. Cette solution est ensuite discrétisée pour être utilisable. Ces étapes sont brièvement expliquées dans cette section.

### II.3.1 Principe

Les méthodes intégrales sont basées sur la résolution de l'équation d'Helmholtz pour une source élémentaire. La source totale est considérée comme l'intégrale volumique de sources ponctuelles. On réécrit l'équation d'Helmholtz pour un point  $\vec{r} = (x, z)$  en introduisant la fonction de Green qui est la solution élémentaire de l'équation pour une source ponctuelle (Zorgati, 1998) :

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') + k^2(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$k^2(\vec{r}) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - j\omega \mu_0 \sigma(\vec{r})$$

La fonction de Green  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  est le champ électrique en un point  $\vec{r} = (x, z)$  pour une source unitaire placée en  $\vec{r}' = (x', z')$ . Avec l'approche intégrale, chaque point ayant une variation de conductivité par rapport à la plaque est considéré comme une source. Le champ électrique total en un point  $\vec{r}$  est considéré comme la somme du champ électrique en  $\vec{r}$  provoqué par l'ensemble des sources dans  $\Omega$  :

$$E(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') J(\vec{r}') d\vec{r}' = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') c(\vec{r}') E(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Soit la fonction contraste

$$c(\vec{r}) = \frac{\sigma_0 - \sigma(\vec{r})}{\sigma_0}$$

Les équations suivantes (Zorgati, 1998) sont obtenues :

$$E_1(\vec{r}) = \iint_{D_2} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}') J(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \vec{r} \in D_1, \vec{r}' \in D_2 \quad (\text{II.7})$$

$$E_2(\vec{r}) = E_{02}(\vec{r}) - j\omega \mu_0 \sigma_0 \iint_{D_2} G_{22}(\vec{r}, \vec{r}') c(\vec{r}') E_2(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \vec{r} \in D_2, \vec{r}' \in D_2 \quad (\text{II.8})$$

En posant :

- $E_1$  le champ électrique dans la bobine dû aux champs électriques dans la plaque placée dans le domaine  $D_2$  ;
- $E_2$  le champ électrique dans la plaque métallique ;
- $E_{02}$  le champ électrique dans la plaque métallique lorsqu'il n'y a pas de défaut (champ incident).

Les équations (II.7) et (II.8) sont les solutions semi-analytiques de l'équation d'Helmholtz.

La fonction  $G_{12}(\vec{r}, \vec{r}')$  représente la valeur du champ électrique en  $\vec{r}$  dans le domaine  $D_1$  lorsqu'une source est située en  $\vec{r}'$  dans le domaine  $D_2$ . De même, la fonction  $G_{22}(\vec{r}, \vec{r}')$  représente le champ électrique en  $\vec{r}$  dans le domaine  $D_2$  lorsqu'une source est située en  $\vec{r}'$  dans le domaine  $D_2$ .



Les fonctions de Green dans les cas 2D et 3D ne sont pas détaillées mais peuvent être trouvées dans (Chew, 1999; Ruosi et al., 2000). Cependant, il est important de noter que les fonctions de Green sont singulières à la source, elles ne sont pas analytiquement connues dans le domaine spatial mais dans le domaine spectral. Dans le cas 2D pour un milieu stratifié, et non un milieu libre, il est nécessaire de passer par une décomposition en ondes planes.

Les conditions aux limites sont importantes dans les problèmes de modélisation. Dans le cas des méthodes intégrales, elles sont imposées dans les fonctions de Green qui résolvent le problème. En effet, ces fonctions respectent la condition de rayonnement de Sommerfeld (Zorgati, 1998) :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} G(\vec{r}, \vec{r}') - jk_0 G(\vec{r}, \vec{r}') \right) = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$$

D'un point de vue physique, cette condition revient à considérer que l'énergie rayonnée par une source doit être dispersée à l'infini.

### II.3.2 Discrétisation par méthode des moments

Pour discrétiser les équations précédentes, la méthode des moments (*method of moments* (MoM)) est très utilisée (Balanis, 1989; Harrington, 1993). Elle consiste à projeter les équations précédentes sur une base de fonctions. La fonction indicatrice de régions carrées de côté  $\Delta x$  peut être employée en faisant l'approximation que les champs et les contrastes sont uniformes sur chaque carré :

$$\mathbf{G}_{22}(i, j) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \frac{1}{\Delta x^2} \int_{D'_i} \int_{D'_j} G_{22}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r}$$

$$\mathbf{G}_{12}(i, j) = -j\omega\mu_0\sigma_0 \frac{1}{\Delta x^2} \int_{D'_i} \int_{D'_\ell} G_{12}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r}$$

Avec  $D'_i$  la surface du pixel  $i$ . Les matrices  $\mathbf{G}_{12}$  et  $\mathbf{G}_{22}$  sont appelées matrices de Green. Il existe d'autres fonctions pour la méthode des moment, le lecteur désireux d'en apprendre davantage peut se reporter à (Balanis, 1989; Harrington, 1993; Lambert, 1998; Zwamborn, 1997).

$\mathbf{X}$  est la matrice diagonale dont la diagonale est  $\mathbf{x}$  i.e.,  $\mathbf{X} = \text{diag}\{\mathbf{x}\}$ . Après discrétisation, on appelle  $\mathbf{e}_1$  le champ électrique mesuré,  $\mathbf{e}_{02}$  le champ incident dans la plaque métallique et  $\mathbf{e}_2$  le champ électrique dans la plaque métallique lorsqu'il y a un défaut. Après discrétisation les équations électromagnétiques deviennent les suivantes :

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{02} + \mathbf{G}_{22}\mathbf{X}\mathbf{e}_2 \quad (\text{II.10})$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{G}_{12}\mathbf{X}\mathbf{e}_2 \quad (\text{II.11})$$

Le champ électrique total  $\mathbf{e}_2$  est la somme du champ électrique incident  $\mathbf{e}_{02}$  (champ électrique sans défaut) et du champ électrique diffracté  $\mathbf{G}_{22}\mathbf{X}\mathbf{e}_2$  (champ dû au défaut).

Elles correspondent aux équations (I.3) et (I.4) du chapitre I. Ces méthodes ont l'avantage d'être basées sur une discrétisation de la solution de l'équation d'Helmholtz. Cependant, dans le cas où le milieu n'est pas un milieu libre (comme en TMO (Abubakar et al., 2001)), les fonctions de Green ne sont pas analytiquement connues, ce qui complique le problème. Les matrices de Green, obtenues après application de la MoM aux fonctions de Green, sont pleines. Elles décrivent la dépendance de l'ensemble des champs électriques d'un pixel par rapport aux autres pixels de la plaque. De plus, elles sont difficiles à calculer à cause de la décomposition en ondes planes nécessaire et de la singularité à la source des fonctions de Green.

Dans le cas de l'inversion, les courants de contraste sont très souvent introduits (van den Berg and Abubakar, 2001), il s'agit de poser  $\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}$  représentant le vecteur des courants de contraste. Ces derniers sont les courants qui sont créés à cause de la variation de conductivité. Les équations (II.10) et (II.11) deviennent respectivement les équations (II.12) et (II.13) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{12}\mathbf{w} \quad (\text{II.12})$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{e}_{02} + \mathbf{X}\mathbf{G}_{22}\mathbf{w} \quad (\text{II.13})$$

Ces équations correspondent aux équations (I.5) et (I.6) du chapitre I. Elles sont utilisées pour résoudre la plupart des problèmes de diffraction.

### II.3.3 Conclusion sur les méthodes intégrales

On a exposé la modélisation très utilisée pour la tomographie par diffraction (tomographie micro-ondes mais également, dans une moindre mesure, par courants de Foucault) basée sur une formulation intégrale de l'équation d'Helmholtz. Cette formulation ne nécessite pas de discrétiser la bobine, l'air environnant et le domaine *a priori* sain, contrairement aux méthodes comme les différences finies ou les éléments finis, comme on le montre par la suite respectivement aux chapitres III et IV. De plus, elle utilise une discrétisation de la résolution exacte de l'équation d'Helmholtz.

Cependant elle comporte des inconvénients majeurs pour notre cas :

- elle n'est applicable que pour des géométries canoniques : milieux homogènes, tubes, plaques, etc. En effet, les fonctions de Green ne sont connues que pour ces géométries. À noter que les plaques rivetées (Paillard et al., 2007) peuvent également être étudiées. Bien que le cadre de l'inversion se limite pour le moment à des plaques, on essaie de proposer une modélisation plus facilement généralisable à des géométries complexes ;
- elle est particulièrement adaptée en tant que modèle direct pour simuler des données uniquement et non dans un cadre d'inversion. Dans ce cas, le défaut est connu, seule sa discrétisation est nécessaire. Les matrices sont donc calculées uniquement pour les points du défaut. Dans le cas où le défaut est inconnu, les matrices doivent être calculées pour les points où il pourrait y avoir un défaut. Le domaine de calcul devient alors plus grand puisque le défaut est *a priori* inconnu. Or ces matrices sont difficiles à calculer à cause des fonctions de Green n'ayant pas d'expression analytique ;
- les matrices qui interviennent sont pleines. Elles sont donc coûteuses en mémoire et en temps de calcul lors des multiplications matrice-vecteur.

On choisit pour ces raisons d'utiliser des méthodes basées sur une discrétisation directe des équations.

## II.4 Variation d'impédance

Le principe des capteurs courants de Foucault est basé sur la mesure de la variation d'impédance de la bobine lorsque le matériau est sain et lorsque le matériau est défectueux. On suppose disposer d'un modèle qui nous permette de calculer le champ électrique  $\mathbf{e}$  lorsqu'il y a un défaut ou lorsqu'il n'y en a pas. Ce modèle peut être un modèle intégral ou un modèle différentiel comme il est montré aux chapitres III et IV. Le champ électrique dû à un défaut n'est pas *in fine* ce qui nous intéresse mais est indispensable pour les mesures. Il est nécessaire de trouver une méthode pour calculer la variation d'impédance engendrée par la présence de défaut. L'impédance de la sonde est appelée  $Z$  et sa variation  $\Delta Z$ .

On utilise la formule d'Auld qui peut être trouvée dans (Bowler et al., 1990; Zorgati, 1998) pour calculer la variation d'impédance :

$$I_0^2 \Delta Z = - \int_{D_\ell} (E(x, z) - E_0(x, z)) J_c \, dx \, dz$$

Dans la formule précédente,  $E(x, z)$  correspond au champ électrique total lorsqu'il y a un défaut,  $E_0(x, z)$  le champ incident (champ électrique sans défaut) et  $J_c$  correspond à la densité de courant qui circule dans la sonde. Cette formule peut être réécrite en faisant intervenir le courant induit  $J_d(x, z)$  par le champ diffracté par le principe de réciprocité pour éviter le calcul du champ au niveau de la sonde :

$$\Delta Z = - \frac{1}{I_0^2} \int_{\Omega_f} E_0(x, z) J_d(x, z) \, dx \, dz \quad (\text{II.14})$$

où  $\Omega_f$  est le défaut *i.e.*,  $\Omega_f = \{(x, z) \in D_2 \mid \sigma(x, z) \neq \sigma_0\}$ .

On voit qu'il est nécessaire de connaître le champ électrique total  $E(x, z)$  pour pouvoir calculer le courant induit  $J_d$ . En effet :

$$J_d(x, z) = (\sigma(x, z) - \sigma_0) E(x, z)$$

On note qu'il est nécessaire de disposer d'un milieu de référence pour pouvoir simuler la variation d'impédance.

## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les équations de Maxwell ainsi que l'équation d'Helmholtz qui s'en déduit. Ces équations permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques nécessaires pour pouvoir calculer la variation d'impédance aux bornes de la bobine.

Le modèle direct utilisé par la méthode EDF-EPM a été détaillé. Ce modèle est supposé linéaire, cette hypothèse est proche de l'approximation de Born mais n'est pas équivalente à cette dernière. Cependant, le calcul de la matrice  $\mathbf{H}$  est effectué en fonction de certaines hypothèses. De plus, le modèle est identifié à l'aide de données pour des défauts connus introduisant une erreur d'identification. Les résultats de ce modèle sont éloignés des données simulées par des modèles physiques. Il paraît important d'avoir un modèle physique pour obtenir une méthode d'inversion robuste et efficace.

La formulation intégrale de l'équation d'Helmholtz est une modélisation élégante et très utilisée dans le cadre de la tomographie de diffraction (notamment en tomographie micro-ondes). Cependant, elle est compliquée à mettre en œuvre et nécessite de calculer des matrices pleines. De plus, elle se limite à des géométries canoniques (espace libre, plaque, tubes etc.). On préfère donc étudier d'autres modélisations plus simples et exploitables pour traiter ce problème, les méthodes différentielles.

# Chapitre III

## Modèle différences finies

### Sommaire

III.1	Principe des différences finies . . . . .	45
III.2	Courants de Foucault par méthode des différences finies . . . . .	46
III.3	Conditions aux limites . . . . .	48
III.4	Variation d'impédance par différences finies . . . . .	49
III.5	Simulation . . . . .	50
III.5.1	Calcul du champ électrique incident . . . . .	50
III.5.2	Simulation des données CF . . . . .	51
III.5.3	Conclusion de la comparaison . . . . .	53
III.6	Conclusion . . . . .	54

Au chapitre II, il est montré la nécessité d'avoir un modèle permettant de calculer la distribution du champ électromagnétique pour simuler la variation d'impédance. On cherche donc à établir un modèle direct simple, liant les mesures et la plaque métallique inspectée, basé sur la physique. Il existe deux grandes approches permettant le calcul des champs électrique et magnétique du domaine d'intérêt :

- les méthodes intégrales basées sur l'utilisation de solutions semi-analytiques de l'équation d'Helmholtz. Ces méthodes utilisent la résolution de l'équation d'Helmholtz puis sur la discrétisation de la solution ;
- les méthodes différentielles : notamment différences finies, volumes finis et éléments finis. A l'inverse, ces méthodes sont basées sur la discrétisation de l'équation d'Helmholtz puis sur la résolution de l'équation discrétisée.

Les méthodes intégrales sont classiques en tomographie de diffraction et brièvement présentées au chapitre II. Ces méthodes sont difficilement exploitables dans un cadre industriel. En effet, elles sont applicables uniquement à des géométries canoniques : milieu libre, plaque, tubes, etc. C'est pourquoi d'autres modèles tels que les modèles différentiels sont étudiés. On détaille davantage dans ce chapitre la méthode des différences finies connue pour être plus simple à mettre en œuvre mais qui peut se révéler moins performante que les méthodes par éléments finis. De plus, on applique cette méthode au problème de calcul de variation d'impédance d'une bobine pour une plaque métallique contenant un défaut.

### III.1 Principe des différences finies

On cherche à discrétiser directement le domaine de calcul et les équations de Maxwell ou leurs dérivées à l'aide des différences finies. Les différences finies sont basées sur un développement de

Taylor-Young de la fonction à estimer. Soit la fonction  $f(x)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à minima de classe  $\mathcal{C}^2$ .

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + o(h^2)$$

Après discrétisation du problème continu 1D en un problème discret 1D avec  $x_i$  des valeurs discrètes de  $x$ , l'équation suivante est obtenue :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}f''(x_i) + o(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (\text{III.1})$$

Dans le cas particulier où la discrétisation est uniforme :

$$\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, x_{i+1} - x_i = \Delta x = \text{cste}$$

Dans ce cas, les expressions suivantes sont obtenues :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2}f''(x_i) + o(\Delta x)^2 \quad (\text{III.2})$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2}f''(x_i) + o(\Delta x)^2 \quad (\text{III.3})$$

Après différentes manipulations élémentaires des équations (III.2) et (III.3), on trouve :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} + o(\Delta x)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{\Delta x^2} + o(1)$$

Les expressions approchées des dérivées première et seconde d'ordre 2 en 1D viennent d'être montrées, toutefois il est possible de trouver des formules de précision d'ordre supérieur (Fornberg, 1988). Ceci est plus compliqué et inutile pour ce qui est recherché.

Pour des cas de dimension plus grande, on utilise la formule de Taylor-Young pour une dimension  $p$  pour une fonction  $f(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) h_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i \cdot h_j + o(\|\mathbf{h}\|^2)$$

Dans le cas 2D, pour une discrétisation uniforme dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ , on obtient l'équation :

$$f(x_{i+1}, z_i) = f(x_i, z_i) + (x_{i+1} - x_i) \frac{\partial}{\partial x} f(x_i, z_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_i, z_i) + o(x_{i+1} - x_i)^2 \quad (\text{III.4})$$

Seules les différences finies pour  $x$  dans la direction  $\vec{x}$  ont été ici considérées. Toutefois, le problème est exactement le même pour  $z$  dans la direction  $\vec{z}$ .

## III.2 Courants de Foucault par méthode des différences finies

On continue à se placer dans le cas particulier du cas 2D transverse magnétique (TM) *i.e.*, le champ électrique  $\vec{E}$  n'a qu'une composante non nulle, la composante selon l'axe  $\vec{y}$ . Les problèmes de discontinuité du champ électrique dans tout le domaine peuvent être évités puisque la composante tangentielle aux interfaces *i.e.*, la composante selon  $\vec{y}$  appelée  $E = \vec{E} \cdot \vec{y}$ , est continue.

Une méthode pour obtenir un schéma numérique à l'aide de la méthode des différences finies est décrite dans la section précédente, il faut l'adapter à notre cas pour l'utiliser. Pour cela, l'équation d'Helmholtz est employée comme pour les méthodes intégrales présentées au chapitre II. Ici est faite l'hypothèse que le milieu est discrétisé uniformément, ce qui n'est pas nécessairement optimal mais qui permet de simplifier le problème et de fixer les idées. On considère ici que  $\Delta x = \Delta z = \text{cte}$ .

Comme dans le cas des méthodes intégrales, il est nécessaire d'utiliser l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta E(x, z) - j\omega\mu_0\sigma(x, z)E(x, z) = j\omega\mu_0 J(x, z)$$

Pour discrétiser l'espace, on pose  $x_i = i\Delta x$  et  $z_j = -j\Delta z$  avec  $i \in \llbracket 1, a \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, c \rrbracket$ .  $a$  est le nombre de pixels selon l'axe  $\vec{x}$  et  $c$  le nombre de pixels selon l'axe  $\vec{z}$ .

$$\Delta E \approx \frac{E(x_{i+1}, z_j) + E(x_{i-1}, z_j) + E(x_i, z_{j+1}) + E(x_i, z_{j-1}) - 4E(x_i, z_j)}{\Delta x^2} \quad (\text{III.5})$$

Le modèle direct est développé à des fins d'inversion. L'objectif final est de reconstruire un défaut *i.e.*, d'estimer la distribution de conductivité relative dans le domaine de calcul à partir de données CF. Le contraste contenu dans le vecteur  $\mathbf{x}$  est introduit dans les équations précédentes.

Après discrétisation, la forme algébrique suivante est obtenue :

$$\mathbf{L}\mathbf{e} + j\omega\mu_0\sigma_0\mathbf{X}\mathbf{e} - j\omega\mu_0\sigma_0\mathbf{e} = \mathbf{f} \quad (\text{III.6})$$

$\mathbf{X}$  est la matrice diagonale constituée des conductivités relatives de chaque pixel du domaine d'intérêt. Il est important de noter que le domaine d'intérêt comprend la plaque mais également l'air et le capteur au-dessus. Dans cette équation matricielle, le domaine de calcul (air+plaque métallique) est implicitement décrit dans la matrice  $\mathbf{X}$ .

Par analogie avec la formulation intégrale Carfantan (1996), cette équation est appelée équation de couplage.  $\mathbf{f}$  est le vecteur discrétisant l'excitation, il est nul partout sauf au niveau des pixels contenant le capteur :

$$\mathbf{f}(k) = \begin{cases} \pm j\omega\mu_0 J_c & \text{si } k \in D_\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} - j\omega\mu_0\sigma_0\mathbf{I}$$

Soit  $N_e$  le nombre d'éléments, ici  $N_e = a \times c$ . Soit  $\mathbf{I}$  la matrice identité de taille  $c \times c$ . La matrice  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$  a la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{I} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{B} & \mathbf{I} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

L'expression de la matrice  $\mathbf{B}$  de taille  $c \times c$  est la suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Il peut être noté que la matrice  $\mathbf{L}$  est bloc Toeplitz à blocs Toeplitz.

Soit le vecteur  $\mathbf{e}$  qui contient les valeurs des champs électriques pour chaque pixel rangé de manière lexicographique de haut en bas (avec  $z$  décroissant) et de gauche à droite (avec  $x$  croissant).

$$\mathbf{e} = ( E(x_1, z_1) \mid E(x_1, z_2) \mid \dots \mid E(x_1, z_c) \mid E(x_2, z_1) \mid \dots \mid E(x_a, z_c) )^t$$

Le champ électrique  $\mathbf{e}$  dans le domaine d'intérêt n'est pas connu. À l'inverse, le vecteur  $\mathbf{e}_{0\ell}$  est connu, puisqu'il s'agit du champ électrique dans le milieu lorsqu'il n'y a aucun défaut, également appelé champ incident.

En utilisant cette modélisation, on essaie de résoudre la formulation forte du problème c'est-à-dire résoudre l'équation approchée en des points par un développement limité. La formulation forte correspond à la détermination de solutions de classe  $\mathcal{C}^p$  (avec  $p$  l'ordre de précision des DF). La discrétisation de l'espace choisie impose les points de l'espace sur lesquels la formulation forte est résolue. Il n'y pas de pavage du domaine comme dans la méthode des éléments finis ou la méthodes des volumes finis.

Les équations du problème ont été posées. Dans les problèmes de résolution d'EDP par une méthode différentielle, le choix des conditions aux limites est très important et ne doit pas être négligé car elles permettent de déterminer complètement le problème.

### III.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont nécessaires pour résoudre ces problèmes, dans le cas contraire il n'y a pas unicité de la solution au problème. Le problème est résolu sur un domaine borné  $\Omega$ . Les conditions aux limites sur  $\Gamma$ , la frontière du domaine  $\Omega$ , doivent être imposées.

Il peut être envisagé d'imposer un champ électrique nul dans le matériau à partir d'une certaine profondeur, nécessairement plus importante que la profondeur de peau  $\delta$ . La profondeur de peau est la profondeur à partir de laquelle une onde électromagnétique a été atténuée de  $1/e$  soit 36,8%,  $\delta = \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_0}^{-1}$ . La profondeur de peau  $\delta$  vaut ici 0,78 mm. Définir les conditions aux limites sur les autres bords pose quelques difficultés. En effet, sur les bords latéraux, autres qu'en profondeur du matériau, le champ peut ne pas être nul. Il est égal au champ total dans le matériau soit la somme du champ incident (imposé par le capteur) et du champ diffracté (inconnu *a priori*). Cependant, le domaine de calcul est choisi suffisamment grand pour que les bords soient considérés assez éloignés du capteur pour imposer le champ nul aux bords. Les conditions nulles (conditions de Dirichlet) aux bords sont déjà implicitement prises en compte dans la matrice  $\mathbf{L}$  telle qu'elle est définie.

Dans les problèmes de propagation d'ondes, il est courant d'utiliser des couches virtuelles de l'espace couramment appelées *perfectly matched layer* (PML) (Berenger, 1994). Les PML sont des couches ajoutées aux bords du domaine de calcul afin de dissiper les ondes qui se propagent et éviter qu'elles soient réfléchies aux bords lorsque des conditions de Dirichlet sont imposées. Ces couches sont très efficaces pour des problèmes propagatifs mais inutiles dans des cas comme le nôtre où le problème est très dissipatif dans les induits.

On peut se demander à partir de quelle taille le domaine est suffisamment grand pour que les conditions aux limites choisies soient cohérentes et que les résultats aient un sens. L'objectif est de trouver un compromis entre un domaine suffisamment grand pour que la modélisation soit précise et un domaine suffisamment petit pour être utilisable sans un coût de calcul important. On trace à la figure III.1 la valeur relative de la valeur absolue du champ électrique lorsque  $z = 0,5$  mm et la valeur relative de la valeur absolue du champ électrique lorsque  $x = -1,4$  mm.

Une étude plus précise montre que la valeur absolue est inférieure à 1% de sa valeur maximale :

- 7,9 mm au-dessus du capteur (dans l'air) ;
- 2,6 mm au-dessous du capteur (dans la plaque) ;
- 8,3 mm par rapport au centre de la bobine ( $z = 0,5$  mm).

Il est difficile de conclure sur la taille du domaine à adopter à l'aide de ces considérations. À partir de 2,6 mm de profondeur la valeur absolue du champ électrique représente moins 1% de la valeur maximale. On pourrait donc penser qu'à partir de cette profondeur, l'influence sur les

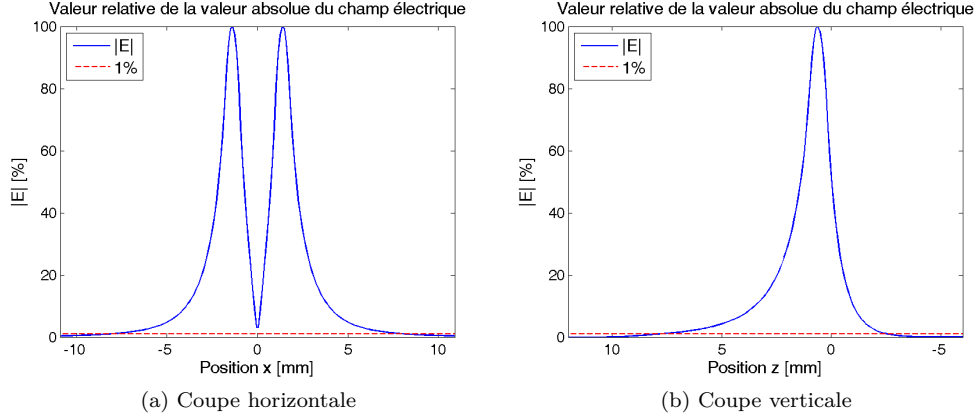


FIG. III.1 – Valeur absolue du champ électrique incident estimé avec COMSOL : coupe horizontale (a) et coupe verticale (b).

données est négligeable. Cependant dans la plaque 2,6 mm n'est pas très profond par rapport à la profondeur de peau. De plus, comme cela est montré plus loin, ce n'est qu'à partir de 2,4 mm qu'il devient difficile de différencier les données.

Un moyen plus efficace et fiable est de définir plusieurs dimensions de domaine de calcul  $\Omega_m$  et de simuler les données CF pour un même défaut. On considère que lorsque  $m$  augmente, la taille du domaine  $\Omega_m$  croît et la taille des éléments diminue. En théorie, lorsque  $m$  tend vers l'infini, la solution obtenue en résolvant le problème dans  $\Omega_m$  tend vers la solution réelle. Il suffit de choisir un domaine de dimensions suffisamment importantes composé d'éléments très fins faisant office de solution de référence qu'on appelle  $\Omega_\infty$ . Une tolérance sur l'écart de variation d'impédance entre la solution dans  $\Omega_m$  par rapport à la solution dans  $\Omega_\infty$  est choisie pour obtenir le plus petit domaine  $\Omega$  possible qui ait une précision suffisante. De cette façon, il est possible d'obtenir un modèle avec une précision acceptable avec des coûts de calcul et mémoire les plus bas possibles.

### III.4 Variation d'impédance par différences finies

Pour le calcul de la variation d'impédance on se base sur l'équation (II.14) du chapitre II qui est discrétisée par la méthode des différences finies.

Soit  $\mathbf{j}$  le vecteur contenant les courants provoqués par la variation de conductivité en chaque point :

$$\mathbf{j} = -\sigma_0 \Delta x \Delta z (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{e}$$

Ici  $\mathbf{X}_0$  est la matrice  $\mathbf{X}$  dans le cas où il n'y a pas de défaut. Il ne faut pas oublier que  $\mathbf{X}$  contient la conductivité relative de tous les pixels que ce soit l'air ou le métal.

On peut effectuer une série de mesures de variation d'impédance en déplaçant le capteur pour différentes positions. Pour chaque position, le calcul de la variation d'impédance est :

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \sigma_0 \mathbf{e}_0^t (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \mathbf{e} \Delta x \Delta z \quad (\text{III.7})$$

Par analogie au cas de la formulation intégrale Carfantan (1996), cette équation est appelée équation d'observation.

On a toutes les équations nécessaires pour calculer la variation d'impédance  $\Delta Z$  connaissant un défaut  $\mathbf{x}$  via l'évaluation du champ électrique  $\mathbf{e}$ .



### III.5 Simulation

Un modèle différences finies en 2D est développé dans ce chapitre afin de calculer le champ électrique dans une plaque métallique lorsqu'une bobine électrique est placée au-dessus.

On cherche désormais à évaluer l'efficacité de ce modèle. Il est proposé d'utiliser les résultats de simulation d'un cas identique obtenus à l'aide de COMSOL afin de les comparer avec les résultats de simulation du modèle DF développé.

#### III.5.1 Calcul du champ électrique incident

Le modèle 2D est testé en simulant un capteur au-dessus d'une plaque sans défaut. Pour cela on simule le même capteur qu'au chapitre II.

Dans le cas 2D, il y a une invariance implicite du problème selon l'axe  $\vec{y}$  et la bobine est décrite par deux rectangles. Cette modélisation de la bobine est erronée et le système se comporte comme si l'on simulait en réalité deux fils électriques de section rectangulaire au-dessus d'une plaque à cause de l'invariance selon l'axe  $\vec{y}$ .

Un pas de discrétisation  $\Delta x = \Delta z = 0,2 \text{ mm}$  est choisi.

Les résultats du calcul du champ électrique pour le cas de simulation décrit à l'aide du modèle DF sont tracés à la figure III.2.

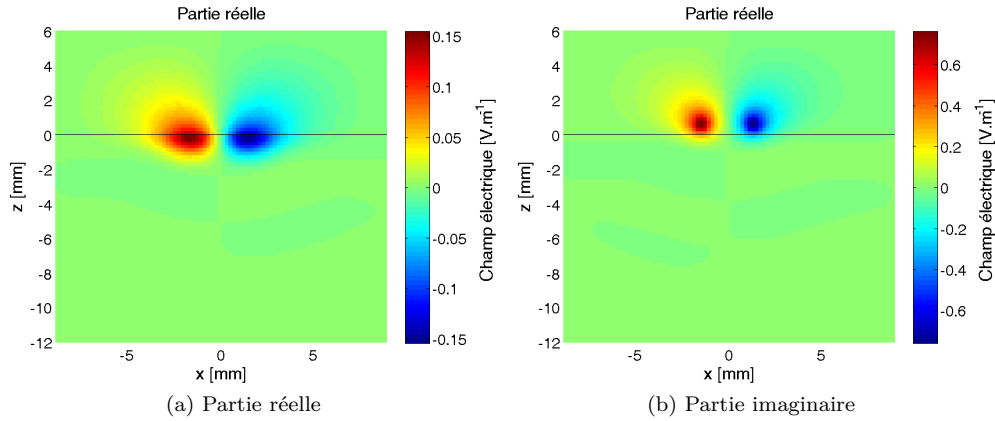


FIG. III.2 – Champ électrique incident avec le modèle différences finies : parties réelle (a) et imaginaire (b)

COMSOL est utilisé afin d'avoir une solution de référence du cas simulé. COMSOL utilise une résolution par éléments finis avec le potentiel vecteur magnétique avec son propre maillage adapté au défaut et au capteur. Les deux résultats comparés, COMSOL et modèle DF, sont obtenus à l'aide de deux méthodes différentes pour un même problème. Cette procédure permet de s'assurer de l'efficacité de la méthode et de valider le modèle.

La distribution du champ électrique dans le domaine calculé par COMSOL est tracée à la figure III.3.

En comparant les figures III.2 et III.3, on observe que les champs obtenus sont très proches. En effet, les formes des parties réelle et imaginaire des champs calculés coïncident de même que l'ordre de grandeur des valeurs.

Afin d'avoir une comparaison plus précise entre les deux modèles employés, des coupes horizontales et verticales des parties réelle et imaginaire du champ électrique pour les deux modèles sont comparées. On effectue à la figure III.4, une comparaison entre les deux modèles en prenant une coupe horizontale à l'altitude  $z = 0,5 \text{ mm}$  et en prenant une discrétisation pour le modèle DF avec  $\Delta x = 0,2 \text{ mm}$ .

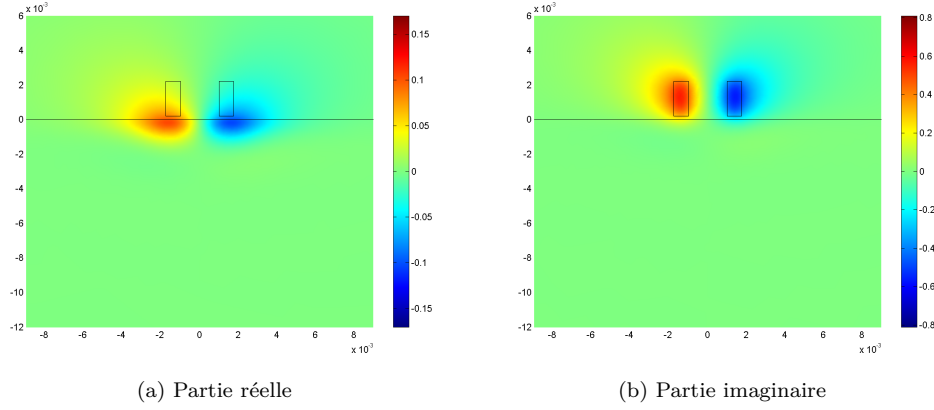


FIG. III.3 – Champ électrique incident avec modèle par COMSOL (distances en mètre) : parties réelle (a) et imaginaire (b)

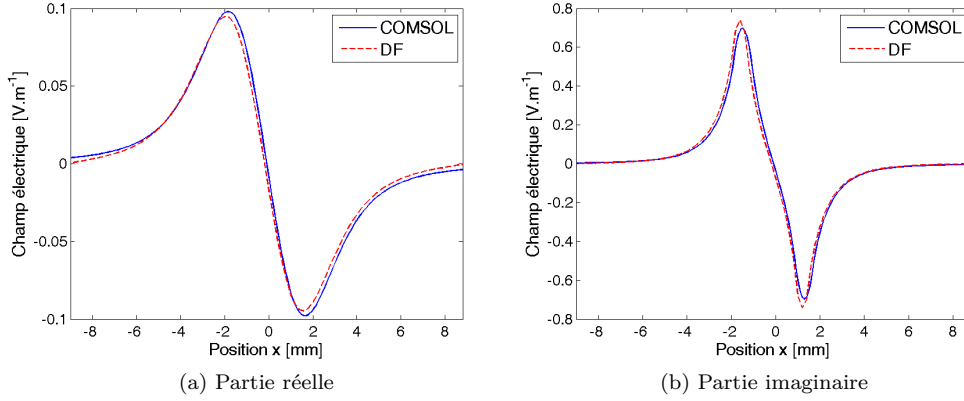


FIG. III.4 – Comparaisons du champ électrique sur la ligne horizontale à l'altitude  $z = 0,5$  mm : parties réelle (a) et imaginaire (b)

De même, une comparaison entre les deux modèles en prenant une coupe verticale à l'abscisse  $x = -1,4$  mm est effectuée à la figure III.5.

Il apparaît sur les figures III.4 et III.5 que les champs calculés sont très proches. Comme précédemment les valeurs et les formes coïncident pour les calculs de champ. Cependant, on peut constater un léger décalage entre les deux résultats. Ce décalage provient de la différence de taille entre les deux domaines de calcul au bord supérieur. En effet, le domaine de calcul du modèle COMSOL est choisi beaucoup plus grand pour s'assurer d'une meilleure précision, par conséquent les conditions aux limites de Dirichlet sont beaucoup plus éloignées, l'énergie du champ électrique est davantage diluée, ce qui permet au champ d'être nul beaucoup plus loin de la bobine. De plus, une discrétisation trop grossière peut également être à l'origine des différences entre les deux résultats.

### III.5.2 Simulation des données CF

Dans la sous-section précédente, les deux modèles sont comparés en terme de champ électrique calculé. On cherche désormais à les comparer en terme de données simulées pour différents défauts. L'équation d'observation (III.7) citée précédemment est utilisée afin d'obtenir les variations d'impédance aux bornes de la bobine en présence de défaut.

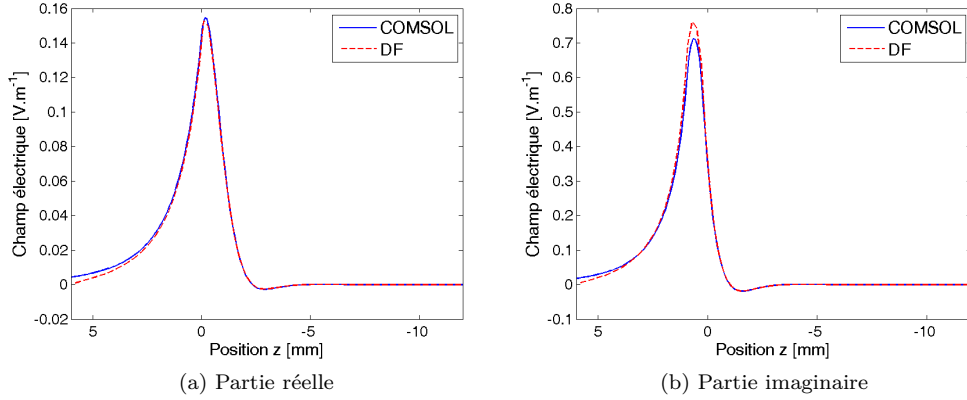


FIG. III.5 – Comparaisons du champ électrique sur la ligne verticale à l'abscisse  $x = -1,4$  mm : parties réelle (a) et imaginaire (b)

On mesure la variation d'impédance lorsque le capteur est déplacé au-dessus d'un défaut ayant les dimensions suivantes :

- largeur : 5 mm ;
- profondeur : 1 mm.

Le défaut simulé est représenté à la figure III.6.

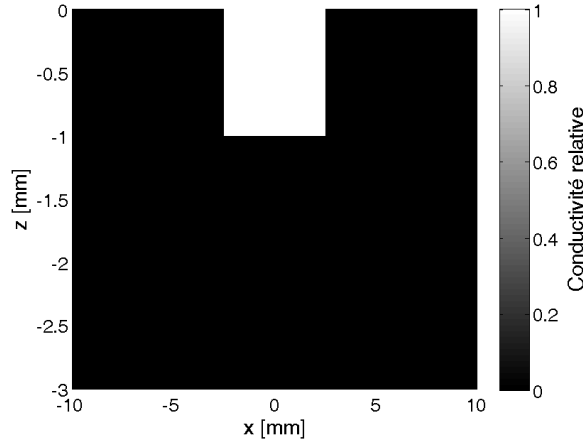


FIG. III.6 – Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm

Etant donné l'invariance selon  $\vec{y}$  de la modélisation, le défaut simulé est en réalité une entaille de longueur infinie.

Afin d'évaluer l'efficacité du modèle, les résultats obtenus par DF sont comparés avec ceux simulés par COMSOL, pour ce même défaut. De plus, pour s'assurer que le calcul de variation d'impédance (Zorgati, 1998) n'est pas erroné, on préfère également utiliser une autre méthode pour valider ce calcul. On calcule avec COMSOL la différence de potentiel électrique à la bobine en absence  $V_0$  et en présence  $V$  de défaut dans la plaque pour obtenir l'impédance de la bobine  $Z_0$  lorsqu'il n'y a pas de défaut ( $V_0 = Z_0 I_0$ ) et l'impédance  $Z$  lorsqu'il y a un défaut ( $V = Z I_0$ ). La variation d'impédance  $\Delta Z$  est ainsi obtenue :

$$\Delta Z = Z - Z_0 = \frac{V - V_0}{I_0}$$

Pour le modèle DF, on impose également le pas de discrétisation  $\Delta x = 0,2 \text{ mm}$ . On trouve les résultats de la figure III.7.

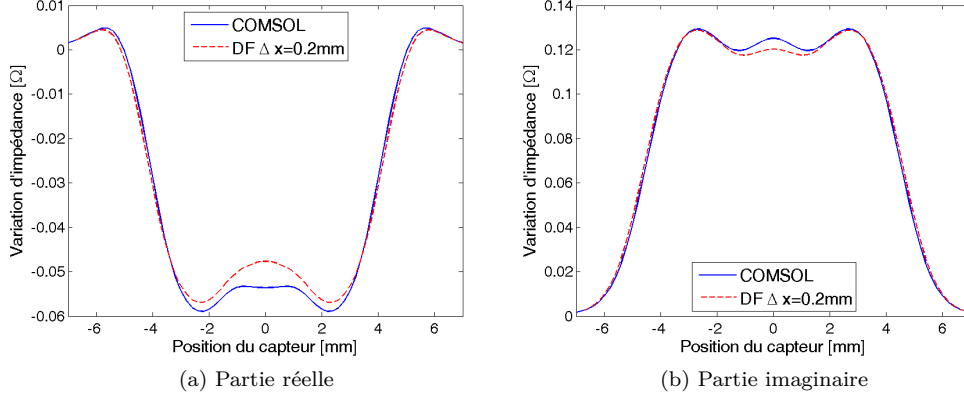


FIG. III.7 – Comparaison entre les données CF par COMSOL et par le modèle DF : parties réelle (a) et imaginaire (b)

On peut observer à la figure III.7 que les résultats sont corrects avec les différences finies malgré la simplicité du modèle et la discrétisation grossière. Toutefois, la différence est plus importante sur la partie réelle de la variation d'impédance. Cette différence est surtout due à la discrétisation grossière.

Afin de quantifier la précision des résultats de simulation de variation d'impédance, on appelle  $\Delta Z_\ell^C$  la mesure calculée par COMSOL, l'écart quadratique moyen  $\epsilon$  est défini par :

$$\epsilon = \frac{1}{L} \sum_{\ell=1}^L \|\Delta Z_\ell - \Delta Z_\ell^C\|^2$$

L'écart quadratique moyen avec le modèle COMSOL est calculé :  $\epsilon = 3,7 \times 10^{-5}$ .

L'écart quadratique relatif est également défini :

$$\epsilon_r = \sum_{\ell=1}^L \|\Delta Z_\ell - \Delta Z_\ell^C\|^2 / \sum_{\ell=1}^L \|\Delta Z_\ell^C\|^2$$

Il vaut  $\epsilon_r = 2,2 \times 10^{-3}$ .

### III.5.3 Conclusion de la comparaison

On a comparé notre modèle direct par différences finies (DF) avec des résultats de simulation obtenus à l'aide du logiciel commercial COMSOL. Les comparaisons effectuées sont très concluantes :

1. la comparaison entre les champs électriques simulés par les deux méthodes montrent de bonnes similarités pour des modélisations et des équations résolues différentes. En effet, le modèle COMSOL est basé sur l'utilisation du potentiel vecteur  $\vec{A}$ . On peut donc conclure que le modèle DF donne des résultats très corrects malgré sa simplicité.
2. la comparaison entre les données simulées pour un défaut donné par les deux méthodes présentent également de fortes coïncidences pour la forme des données mais également pour les valeurs. Il est à noter également que les méthodes de calcul de la variation d'impédance sont différentes. On valide donc la méthode de calcul de variation d'impédance et le modèle DF pourvu que la discrétisation soit suffisamment fine par rapport aux dimensions du problème.

De plus, en utilisant les données simulées par COMSOL et en les considérant comme données de référence, on peut trouver un compromis entre une discrétisation fine, précise mais coûteuse en calculs, et une discrétisation grossière, peu coûteuse mais imprécise.

On peut donc conclure que le modèle 2D par différences finies donne des résultats suffisamment corrects pour pouvoir être exploitable dans un cadre d'inversion avec une charge de calcul raisonnable pour des tests préliminaires pour l'inversion.

## III.6 Conclusion

On a proposé un modèle différences finies pour modéliser la distribution du champ électrique dans une plaque métallique avec ou sans défaut afin de l'utiliser dans le cadre d'un problème d'inversion CF. Un modèle différences finies a l'avantage d'être relativement facile à mettre en œuvre.

Le modèle développé montre des caractéristiques intéressantes telles que la bilinéarité par rapport au contraste  $\mathbf{x}$  et au champ électrique  $\mathbf{e}$  ainsi que des matrices bloc Toeplitz à blocs Toeplitz. De plus, celles-ci sont très creuses. Durant l'inversion, la bilinéarité est exploitée afin de faciliter et d'accélérer la résolution du problème (Trillon, 2009; Trillon et al., 2009) comme le font les méthodes de type MGM/CSI présentées au chapitre I. Aux chapitres V et VI, des adaptations de ces méthodes sont présentées.

Les inconvénients liés à cette modélisation sont nombreux. Tout d'abord, cette modélisation est connue pour être moins précise puisqu'elle ne résout le problème qu'en des points précis de l'espace. Par conséquent, il n'existe pas de pavage particulier de l'espace, ce qui peut engendrer des indéterminations ou des ambiguïtés en dehors des points où le problème est résolu.

De plus, la discrétisation généralement associée aux différences finies est cartésienne, voire triangulaire structurée (Magnier et al., 1994). Or, celle-ci ne permet pas de décrire de manière efficace des géométries plus complexes comme des cylindres ou des sphères.

Enfin, la méthode des différences finies ne s'applique que sur des problèmes simples, comme le problème d'électromagnétisme en 2D transverse magnétique. En 3D, il n'est pas possible d'utiliser le modèle DF car il est impossible de prendre en compte les discontinuités de la composante normale du champ électrique au niveau des interfaces entre éléments ayant des conductivités différentes. En effet, dans le cas transverse magnétique qui est développé dans ce chapitre, le champ électrique n'a qu'une composante selon l'axe  $\vec{y}$ . Or la composante tangentielle du champ électrique à l'interface entre éléments est continue comme le montrent les équations de continuité du chapitre II. Inversement, la composante normale du champ électrique est discontinue et dépend des charges accumulées à la surface de la discontinuité et ces charges sont difficiles à calculer. Or en 3D, il est nécessaire de calculer toutes les composantes du champ électrique ou du champ magnétique. Les différences finies ne permettent pas de gérer ce type de difficultés. L'emploi d'éléments finis avec éléments d'arête permet de résoudre le problème des discontinuités.

C'est principalement à cause de l'impossibilité de prendre en compte les géométries complexes et les discontinuités qu'il est décidé d'utiliser la méthode des éléments finis pour modéliser le problème en 3D. Tout d'abord un modèle 2D par éléments finis est développé afin de tester la possibilité d'adapter les éléments finis aux méthodes d'inversion développées. Toutefois, la méthode des différences finies est un bon point de départ pour mettre en œuvre et tester des méthodes d'inversion pour notre problème comme on le montre au chapitre VIII.

# Chapitre IV

## Modèle éléments finis

### Sommaire

IV.1	Courants de Foucault par la méthode éléments finis en 2D . . . . .	55
IV.2	Variation d'impédance par EF . . . . .	59
IV.3	Simulation . . . . .	59
IV.4	Conclusion . . . . .	60

Comme cela a été montré au chapitre III, la méthode des différences finies peut être utilisée afin de développer un modèle direct dans le cadre de la tomographie CF en 2D. Cette méthode est très simple d'implémentation et donne des résultats de simulation corrects pour des géométries facilement discrétisables par un maillage structuré cartésien. En 3D, cette méthode n'est cependant plus applicable car elle ne permet pas de prendre en compte les discontinuités de champs électrique ou magnétique provoquées par la présence de la plaque ou les variations de conductivité en général. C'est pourquoi, il est préférable d'employer la méthode des *éléments finis* EF (*finite element method* FEM). Celle-ci permet de travailler avec des géométries complexes et fournit des équations algébriques proches de celles développées au chapitre III. Ceci permet ainsi de conserver les méthodes d'inversion développées avec le modèle différences finies. La méthode éléments finis classique entraîne quelques complications lorsque la bobine est déplacée à cause du maillage. En 2D, cette difficulté peut être contournée, ce qui est plus compliqué en 3D.

Dans ce chapitre, on présente l'utilisation des éléments finis pour obtenir un modèle direct 2D en champ électrique reliant données CF et distribution de conductivité.

### IV.1 Courants de Foucault par la méthode éléments finis en 2D

De la même manière qu'au chapitre III avec un modèle DF, un modèle direct basé sur les éléments finis est développé pour les courants de Foucault. Le lecteur intéressé par plus de détails sur la méthode des éléments finis est reporté à l'annexe C et à la lecture de (Jin, 1993; Silvester and Ferrari, 1996).

Les hypothèses du cas 2D transverse magnétique, déjà employées dans le chapitre III, sont à nouveau formulées donc le champ électrique  $E(x, z)$  est scalaire.

Le modèle éléments finis est basé sur une discrétisation de la formulation faible et la résolution des équations discrétisées. Pour plus de généralités, l'espace est discrétisé avec un maillage non structuré triangulaire. Trois degrés de liberté sont imposés pour chaque élément  $k$  sur le domaine  $\Omega^k$  ce qui revient à employer des éléments de Lagrange d'ordre 1 pour fonctions de base. Il est possible d'utiliser davantage de degrés de liberté pour un élément triangulaire, ce qui revient à

ajouter des nœuds de calcul sur les arêtes du triangle. Cependant, ceci alourdit le volume de calcul et la mémoire nécessaires pour résoudre ce problème. Il y a  $N_n$  degrés de liberté dans le problème global, où  $N_n$  correspond le nombre de nœuds du maillage dans ce cas particulier.

Le domaine  $\Omega$  composé de  $N_e$  éléments  $\Omega^k$  est montré à la figure IV.1 ainsi que le capteur et le défaut simulé. On remarque à la figure IV.1 que l'espace est discrétisé finement à proximité du capteur et de manière plus grossière au fur et à mesure que la distance depuis le capteur augmente.

Il s'agit tout d'abord de travailler sur un élément triangulaire  $k$  constitué de 3 nœuds pour obtenir une équation élémentaire liée à cet élément  $k$  liant les 3 nœuds entre eux. Pour chaque élément, une équation élémentaire est obtenue liant les nœuds constituant l'élément considéré. Pour obtenir une équation globale reliant tous les nœuds entre eux, on considère que le champ électromagnétique est continu aux nœuds et qu'un même nœud peut être partagé par plusieurs éléments.

Le champ électrique  $E$  est approché par un polynôme de degré 1 sur chaque élément  $k$ . La méthode EF consiste dans notre cas à estimer les valeurs  $e_1^k$ ,  $e_2^k$  et  $e_3^k$  correspondant aux champs électriques aux sommets de l'élément triangulaire  $k$ . Ces degrés de liberté sont également partagés par d'autres éléments.

$$e^k(x, z) = a + bx + cz = e_1^k \phi_1(x, z) + e_2^k \phi_2(x, z) + e_3^k \phi_3(x, z) = \sum_{i=1}^3 e_i^k \phi_i(x, z)$$

où  $e^k(x, z)$  est le champ électrique approximé par un polynôme de degré 1 sur l'élément  $k$ . La méthode des éléments finis consiste à évaluer pour chaque élément  $k$  la valeur des degrés de liberté, ici les champs électriques aux nœuds,  $\{e_i^k\}_{i=1,\dots,3}$ .

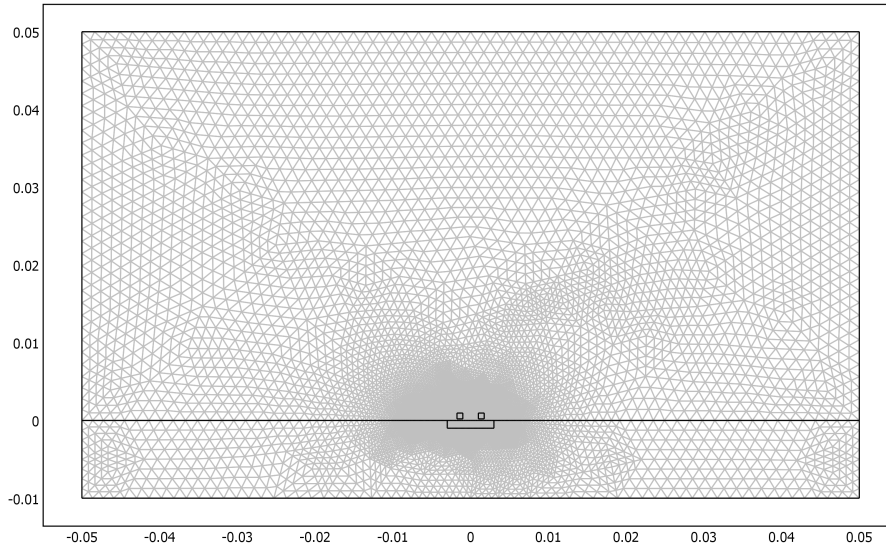


FIG. IV.1 – Exemple de maillage triangulaire non structuré utilisé dans cet ouvrage (distances en mètre)

La méthode de Galerkin continue est employée, les fonctions base  $\phi(x, z)$  et test  $w(x, z)$  i.e.,  $w^k = \phi^k$ . On considère que la conductivité, et donc le contraste, sont constants par élément.

La formulation faible de l'équation d'Helmholtz est obtenue :

$$\frac{1}{\sigma_0} \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla E(x, z) w(x, z) \, d\Omega + \int_{\Omega} q(c(x, z) - 1) E(x, z) w(x, z) \, d\Omega = \frac{q}{\sigma_0} \int_{\Omega} J(x, z) \, d\Omega \quad (\text{IV.1})$$

L'équation (IV.1) est réécrite comme une intégrale restreinte à  $\Omega^k$ , il y a  $N_e$  éléments et  $N_n$  nœuds (voir à l'annexe C). Comme pour le modèle DF, les conditions aux limites choisies sont les conditions de Dirichlet. Après quelques manipulations algébriques, la formulation faible restreinte à un élément  $\Omega^k$  est obtenue :

$$-\frac{1}{\sigma_0} \int_{\Omega^k} \nabla e^k \cdot \nabla w^k d\Omega^k - q \int_{\Omega^k} e^k w^k d\Omega^k + qc^k \int_{\Omega^k} e^k w^k d\Omega^k = \frac{q}{\sigma_0} J^k \int_{\Omega^k} w^k d\Omega^k \quad (\text{IV.2})$$

$J^k$  est la densité de courant qui circule dans l'élément  $k$ . En introduisant  $c^k$  le contraste de l'élément  $k$  :

$$c^k = \frac{\sigma^k - \sigma_0}{\sigma_0}$$

$$q = j\omega\mu_0$$

La contribution locale suivante est obtenue pour l'élément  $k$  :

- contribution à gauche :  $\mathbf{L}^k \mathbf{e}^k + \mathbf{K}^k \mathbf{e}^k + \mathbf{K}_x^k \mathbf{e}^k$
- contribution à droite :  $\mathbf{f}^k$

En posant

$$(\mathbf{e}^k)^t = (e_1^k \mid e_2^k \mid e_3^k)$$

$$\mathbf{L}^k(j, i) = \left( \frac{q}{\sigma_0} \int_{\Omega^k} \nabla \phi_i^k \cdot \nabla \phi_j^k d\Omega^k \right) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

$$\mathbf{K}^k(j, i) = \left( q \int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k d\Omega^k \right) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

$$\mathbf{K}_x^k(j, i) = \left( -qc^k \int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k d\Omega^k \right) \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$$

$$\mathbf{f}^k(j) = J^k \left( -\frac{q}{\sigma_0} \int_{\Omega^k} \phi_j^k d\Omega^k \right) \in \mathbb{C}^3$$

La fonction  $\phi_i^k$  est un polynôme linéaire qui vaut 1 au nœud  $i$  de l'élément  $k$  et qui est nulle aux autres nœuds de ce même élément.

En utilisant les éléments de référence présentés à l'annexe C, les équations suivantes sont obtenues :

$$\int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k d\Omega^k = \frac{A^k}{24} \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{\Omega^k} \phi_j^k d\Omega^k = \frac{A^k}{6}$$

Les calculs précédents permettent de calculer les termes des matrices élémentaires pour chaque élément. Un élément est constitué de trois nœuds qu'il partage avec d'autres éléments. Le champ électrique est considéré continu, il ne possède qu'une seule valeur en un même nœuds. La constitution du système global consiste à assembler les matrices permettant de relier tous les degrés de liberté entre eux. Il s'agit donc de sommer l'ensemble des contributions de chaque élément et de chaque degré de liberté au problème.

Les matrices suivantes sont définies :

$$\mathbf{L}(j, i) = \frac{1}{2}q \begin{cases} \sum_k^{\mathcal{E}_j} \frac{1}{A^k} \left( (x_o - x_p)^2 + (z_o - z_p)^2 \right), \{o, p\} \in \mathcal{K}_k \setminus \{j\} & \text{si } i = j \\ \sum_k^{\mathcal{E}_j} \frac{1}{A^k} ((x_i - x_p)(x_p - x_j) + (z_i - z_p)(z_p - z_j)), p \in \mathcal{K}_k \setminus \{i, j\} & \text{si } i \in \mathcal{V}_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}(j, i) = \frac{1}{24}q \begin{cases} 2 \sum_k^{\mathcal{E}_j} A^k & \text{si } i = j \\ \sum_k^{\mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_i} A^k & \text{si } i \in \mathcal{V}_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\mathbf{K}_x(j, i) = -\frac{1}{24}q \begin{cases} 2 \sum_k^{\mathcal{E}_j} c^k A^k & \text{si } i = j \\ \sum_k^{\mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_i} c^k A^k & \text{si } i \in \mathcal{V}_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbf{f}(j) = \frac{1}{6} \sum_k^{\mathcal{E}_j} J^k A^k$$

Sont appelés :

- $A^k$  : l'aire de l'élément  $k$  ;
- $\mathcal{E}_j$  : l'ensemble des éléments triangulaires  $k$  dont le nœud  $j$  est un sommet ;
- $\mathcal{K}_k$  : l'ensemble des nœuds constituant l'élément  $k$  ;
- $\mathcal{V}_j$  : le voisinage du nœud  $j$  *i.e.*, l'ensemble des nœuds partageant un élément avec le nœud  $j$ .

Les matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{K}_x$  et  $\mathbf{K}$  sont de taille  $N_n \times N_n$  *i.e.*,  $\{\mathbf{L}, \mathbf{K}, \mathbf{K}_x\} \in (\mathbb{C}^{N_n \times N_n})^3$ . Tandis que  $\mathbf{f}$  qui représente l'excitation du système est un vecteur de taille  $N_n$  *i.e.*,  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N_n}$ .

Les expressions des matrices montrées précédemment ne sont pas exploitables pour l'assemblage des matrices mais on peut remarquer que ces matrices ont des expressions proches de champs de Markov.

En posant :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{K}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{K}_x$$

La matrice  $\mathbf{L}$  est une matrice bande représentée à la figure IV.2.

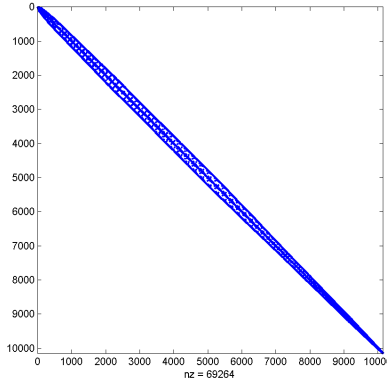


FIG. IV.2 – Forme de la matrice  $\mathbf{L}$

Les matrices  $\mathbf{K}_x$  et  $\mathbf{K}$  ont également la forme décrite à la figure IV.2. Cette forme ne dépend que du maillage et de la connectivité des nœuds.

Il est à noter que la matrice  $\mathbf{A}$  dépend de l'objet  $\mathbf{x}$ . Plus précisément, les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{K}$  ne dépendent que de la discrétisation et de la plaque sans défaut, et non du défaut puisque  $\mathbf{x}$  n'intervient pas. *A contrario* la matrice  $\mathbf{K}_x$  dépend de la discrétisation et de la répartition de la conductivité dans le domaine de calcul. Par conséquent, dans le cadre de l'utilisation de ce modèle direct pour un modèle inverse, le vecteur de contraste  $\mathbf{x}$  est la grandeur intéressante, on cherche donc à obtenir la dépendance du modèle par rapport au vecteur  $\mathbf{x}$ . En général, en modélisation la variable est fixée au début du problème, cette dépendance importe peu. Avec les approches généralement employées pour résoudre les problèmes inverses, la dépendance du modèle direct par rapport à  $\mathbf{x}$  doit être explicitée.

Il est nécessaire de réécrire la matrice  $\mathbf{K}_x$  de façon à exprimer sa dépendance par rapport à  $\mathbf{x}$  de manière plus explicite *i.e.*, on cherche à contruire une matrice  $\mathbf{K}_e$  telle que  $\mathbf{K}_x \mathbf{e} = \mathbf{K}_e \mathbf{x}$  dont

la définition est la suivante :

$$\mathbf{K}_e^k(j, i) = -q e_i \int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k d\Omega^k$$

Une fois assemblée, la matrice  $\mathbf{K}_e$  a l'expression générale suivante :

$$\mathbf{K}_e(j, i) = -\frac{1}{24}q \begin{cases} A^i(2e_j + e_o + e_p), \{o, p\} \in \mathcal{K}_i \setminus \{j\} & \text{si } j \in \mathcal{K}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{K}_e \in \mathbb{C}^{N_n \times N_e}$ .

Un modèle éléments finis a été développé permettant de calculer la distribution du champ électrique dans un domaine  $\Omega$  composé d'air, d'une plaque métallique et d'une bobine, lorsque cette dernière est parcourue par un courant de densité  $J_c$ .

## IV.2 Variation d'impédance par EF

Le calcul de la distribution du champ électrique dans la plaque a été effectué précédemment. Il est désormais nécessaire de calculer la variation d'impédance  $\Delta Z$  pour un défaut connu. Pour cela, la formule d'Auld (Bowler et al., 1990) est employée comme dans le cas de la modélisation par différences finies en employant cette fois la méthode des éléments finis. On se base sur l'équation d'Auld continue (II.14) du chapitre II qui est cette fois discrétisée par les EF.

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \sigma_0 \int_{\Omega} (c - c_0) EE_0 d\Omega$$

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \sigma_0 \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{0i}^k e_i^k (c^k - c_0^k) \int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k d\Omega^k$$

Après discrétisation et utilisation de l'élément de référence (cf annexe C), les équations matricielles suivantes sont obtenues :

$$\mathbf{K}_{x0}^k(j, i) = -q \int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k c_0^k d\Omega^k$$

La matrice  $\mathbf{K}_{x0}$  assemblée a l'expression générale suivante :

$$\mathbf{K}_{x0}(j, i) = -q \frac{1}{24} \begin{cases} 2 \sum_k^{\mathcal{E}_j} c_0^k A^k & \text{si } i = j \\ \sum_k^{\mathcal{E}_j \cap \mathcal{E}_i} c_0^k A^k & \text{si } i \in \mathcal{V}_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement, on trouve l'expression suivante pour la variation d'impédance :

$$\Delta Z = \mathbf{e}_0^t \frac{\sigma_0}{q} (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) \mathbf{e}$$

Un modèle direct a été développé et peut être utilisé pour résoudre notre problème inverse : simuler un champ électrique  $\mathbf{e}$  et une variation d'impédance  $\Delta Z$  pour un défaut  $\mathbf{x}$  supposé connu. De plus, la forme algébrique du modèle développé est très proche de celle obtenue avec la méthode des différences finies.

## IV.3 Simulation

On cherche à valider et évaluer le modèle développé par EF à l'aide du logiciel commercial COMSOL qui est considéré comme notre référence dans la suite de cette étude. Dans cette section, les modèles sont uniquement comparés en terme de variation d'impédance, en considérant que

si la variation d'impédance est correcte par méthode EF, il est vraisemblable que les champs calculés soient bien approximatés également. Le modèle 2D est testé en simulant un capteur au-dessus d'une plaque sans défaut. La même méthodologie qu'au chapitre III est employée, la distribution du champ électrique est calculé à l'aide d'une modélisation différente. De plus, la variation d'impédance pour le modèle COMSOL est encore une fois estimée en calculant la différence de potentiel électrique aux bornes du capteur avec et sans défaut, sans utiliser la formule d'Auld.

Le maillage employé par la méthode EF développée précédemment est le même quel que soit la position du capteur. A l'inverse, COMSOL génère un maillage adapté en fonction de la position du capteur.

Les résultats de simulation avec COMSOL et avec le modèle EF sont tracés à la figure IV.3.

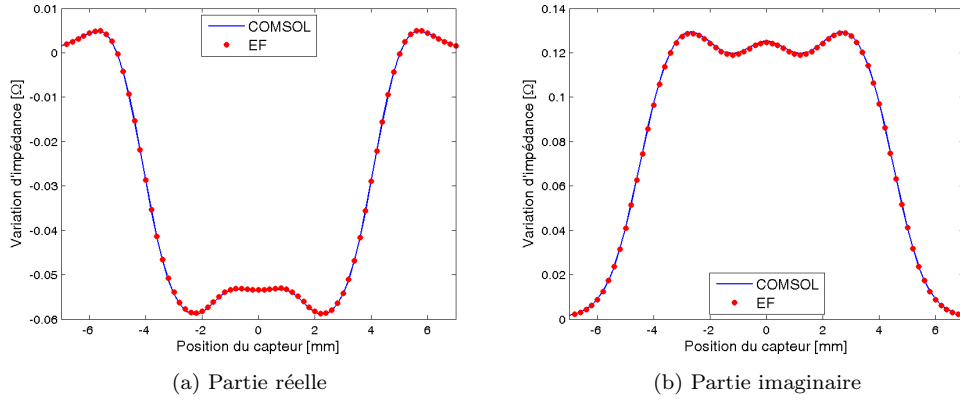


FIG. IV.3 – Comparaison entre les données : parties réelle (a) et imaginaire (b)

En calculant l'écart quadratique moyen entre les données COMSOL et les données EF, tel que défini au chapitre III, on trouve :

–  $2,51 \times 10^{-7}$  pour le modèle EF ;

De même pour l'écart quadratique relatif :

–  $2,32 \times 10^{-5}$  pour le modèle EF ;

La modélisation EF adoptée pour l'inversion est très efficace et proche des données simulées par COMSOL. Ceci montre que le maillage utilisé pour notre modèle EF est suffisamment grand et suffisamment fin.

## IV.4 Conclusion

Le modèle éléments finis développé donne de bons résultats et peut être utilisé pour résoudre le problème inverse posé car leur implémentation est simple. De plus, les modèles EF sont très classiques et maîtrisés. Cependant, la méthode par éléments finis possède quelques faiblesses par rapport à la méthode DF :

1. l'assemblage des matrices et vecteurs nécessaires est plus coûteux en temps étant donné que les matrices sont moins creuses et que les matrices  $\mathbf{K}_x$ ,  $\mathbf{K}_{x_0}$  et  $\mathbf{K}$  ne sont pas diagonales comme c'est le cas pour la modélisation par différences finies ;
2. bien qu'il existe un terme de bilinéarité par rapport au contraste et au champ électrique, il est nécessaire de reconstruire des matrices  $\mathbf{K}_x$  et  $\mathbf{K}_e$  respectivement à chaque fois que  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{e}$  varie. Par contre, les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{K}$  peuvent être assemblées une fois seulement. L'assemblage le plus handicapant est celui de la matrice  $\mathbf{K}_e$  car il est nécessaire pour chaque position du capteur. Néanmoins, le temps d'assemblage peut être diminué par un codage adapté ;

3. la discrétisation triangulaire introduit une interaction entre les nœuds plus importante. En effet, un nœud est lié aux nœuds avec lesquels il partage des éléments communs. Les matrices assemblées sont donc moins creuses que dans le cas DF puisqu'un nœud est lié à beaucoup d'autres. Pour le maillage exhibé précédemment, on a environ 7 éléments reliés entre eux, contre 5 avec les différences finies.
4. le maillage triangulaire non structuré ne permet pas de conserver une structure de matrice Toeplitz à blocs Toeplitz. Cette structure est très forte et peut être exploitée afin d'accélérer les calculs. En théorie, utiliser un maillage triangulaire structuré devrait toutefois permettre d'obtenir une telle structure.

Cependant, il y a des avantages importants à utiliser la méthode des éléments finis :

1. les éléments finis s'adaptent à toutes les géométries grâce à l'utilisation d'un maillage triangulaire ;
2. on peut utiliser des outils classiques dans les méthodes par éléments finis basés sur l'estimation d'erreur *a posteriori* permettant de raffiner ou de rendre plus grossier le maillage en cours d'inversion. Cependant, ces techniques sont trop évoluées pour être utilisées durant l'inversion mais peuvent être utilisées *a priori* pour générer un maillage pertinent.



# Conclusion

Dans cette partie, différentes modélisations en électromagnétisme ont été confrontées afin de faire le bilan de leurs avantages et inconvénients. Le but est de choisir un modèle adapté à l'inversion à partir des données CF.

La modélisation utilisée en tomographie par CF dans la méthode EDF-EPM basée sur l'identification d'un modèle direct linéaire n'est pas retenue pour l'inversion. En effet, d'après les résultats des méthodes développées utilisant ce modèle Dubost and El-Guedri (2008), il existe une ambiguïté entre largeur et profondeur des défauts reconstruits. Il semble que le caractère linéaire du modèle soit à l'origine de cette indétermination. Cette dernière limite donc l'efficacité de la méthode d'inversion. De plus, ce modèle n'est pas basé sur des équations physiques, ce qui limite également son efficacité. C'est pourquoi, les modèles basés sur les équations physiques ont été étudiés.

Les méthodes intégrales sont très utilisées en tant que modèle direct pour l'inversion. Cependant elles sont limitées à des problèmes possédant des géométries particulières (espace libre, tube, plaque, etc.) ce qui est limitant pour des applications industrielles. De plus, ces méthodes procurent des équations algébriques faisant intervenir d'énormes matrices pleines donc coûteuses en mémoire et en temps de calcul. C'est pourquoi, on choisit d'utiliser des méthodes différentielles, plus faciles à mettre en œuvre et adaptables à des problèmes ne possédant pas de géométrie canonique.

Le modèle différences finies est le modèle différentiel le plus simple à développer et à mettre en œuvre pour l'inversion CF. Ce modèle a été testé dans cette partie et donne des résultats très intéressants malgré sa simplicité. Cependant, il possède quelques limites en termes de respect de contraintes physiques telles que les continuités et discontinuités de champ électromagnétique aux interfaces. De plus, les disques ou les courbes sont difficiles à discrétiser avec les modèles DF utilisant une discrétisation cartésienne.

Les modèles éléments finis développés sont plus difficiles à mettre en œuvre mais sont très utilisés dans la littérature quel que soit le problème de modélisation : mécanique, hydrodynamique, thermique ou électromagnétisme. De plus, les éléments finis permettent d'employer une discrétisation efficace de géométries complexes à l'aide d'un maillage triangulaire. Enfin, ils permettent aussi de prendre en compte les discontinuités de conductivité entre éléments contrairement au modèle différences finies. La modélisation éléments finis a été étudiée pour pouvoir éviter ces problèmes.

Un modèle EF classiquement basé sur le calcul des valeurs du champ électrique au niveau des nœuds a été développé. Cette méthode est très efficace et utilisable dans un cas 2D pour l'inversion car il est possible d'employer un maillage unique adapté à toutes les positions du capteur. En 3D, la version classique du modèle EF est plus difficile à utiliser à cause de la nécessité de mailler l'espace pour chaque position du capteur. Il n'est plus possible de trouver un maillage adapté à toutes les positions du capteur.

Pour éviter le maillage de la bobine, une approche intégrale au niveau de la bobine est utilisée. Elle permet de limiter le maillage à la plaque inspectée, diminuant ainsi le nombre d'inconnues à calculer. De plus, des modes oscillatoires peuvent apparaître en 3D, l'introduction des éléments de Nédélec également appelés *edge-elements* peut éviter cette difficulté. Par contre, l'inversion est plus difficile à effectuer. Ceci est présenté à l'annexe I.

Les modèles différentiels développés ont pour objectif d'être utilisés dans un cadre d'inversion. On cherche à exploiter les modèles développés à des fins d'inversion dans la partie suivante en

exploitant les caractéristiques intéressantes de ces modèles : bilinéarité, parcimonie des matrices, etc.

## Deuxième partie

# Inversion des données CF





# Chapitre V

## Critère

### Sommaire

V.1	Notations . . . . .	<b>67</b>
V.2	Problème sans contraintes de couplage . . . . .	<b>68</b>
V.2.1	Critère XF-MGM . . . . .	69
V.2.2	Critère XF-CSI . . . . .	70
V.2.3	Critère XF-Basique . . . . .	71
V.2.4	Liens entre les critères . . . . .	72
V.3	Problème sous contraintes de couplage . . . . .	<b>73</b>
V.4	Approche bayésienne . . . . .	<b>74</b>
V.4.1	Champ de Markov . . . . .	75
V.4.2	Energie minimale . . . . .	77
V.4.3	Contraintes de bornes . . . . .	77
V.5	Conclusion . . . . .	<b>78</b>

Dans la partie précédente, la modélisation pour les courants de Foucault est présentée. Aux chapitres III et IV, différentes formes de modélisation possibles pour obtenir un modèle direct ont été présentées : différences finies DF et éléments finis nodaux EF. Ces modèles directs semblent être les plus pertinents pour résoudre notre problème. Ils permettent de calculer la distribution d'une variable électromagnétique dans une plaque métallique avec ou sans défaut. La connaissance de cette variable électromagnétique est nécessaire afin de simuler la variation d'impédance mesurée aux bornes de la bobine déplacée au-dessus de la plaque testée. Il s'agit désormais d'exploiter ces différents modèles afin de reconstruire des défauts dans des plaques métalliques à l'aide des données courants de Foucault mesurées.

Compte tenu des fortes similarités entre les différents modèles directs développés, une nomenclature générale indépendante du modèle utilisé (DF ou EF) est adoptée. Dans ce chapitre, on adapte les critères MGM et CSI présentés au chapitre I pour résoudre le problème de tomographie CF aux modèles différentiels DF et EF. Contrairement à l'esprit des méthodes de type MGM/CSI, le choix de critère et l'algorithme de minimisation sont ici dissociés, ce dernier étant présenté au chapitre VI. De plus, les *a priori* à disposition sur le défaut à reconstruire sont présentés dans ce chapitre ainsi que la manière dont ils sont introduits dans notre problème.

### V.1 Notations

Compte tenu des fortes ressemblances entre les modèles, dans ce chapitre une seule nomenclature est adoptée pour les équations d'observation et de couplage en fonction d'une variable

électromagnétique  $\mathbf{e}_\ell$  pour la position  $\ell$  du capteur :

$$\Delta Z_\ell = \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0}^d - \mathbf{K}_x^d) \mathbf{e}_\ell \quad (\text{V.1})$$

$$\mathbf{M} \mathbf{e}_\ell + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_\ell = \mathbf{f}_\ell \quad (\text{V.2})$$

On formule également ces équations en fonction du contraste  $\mathbf{x}$  :

$$\Delta Z_\ell = \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{K}_{x0} \mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{K}_e^d \mathbf{x} \quad (\text{V.3})$$

$$\mathbf{M} \mathbf{e}_\ell + \mathbf{K}_e^m \mathbf{x} = \mathbf{f}_\ell \quad (\text{V.4})$$

Les matrices  $\mathbf{K}_{x0}^d$ ,  $\mathbf{K}_x^d$ ,  $\mathbf{K}_x^m$ ,  $\mathbf{K}_e^d$  et  $\mathbf{K}_e^m$  introduites dépendent de la modélisation adoptée pour résoudre le problème.

**Différences finies** Dans le cas des différences finies, les équations suivantes sont obtenues en se référant aux sections III.2 et III.4 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x^m &= j\omega\mu_0\sigma_0 \mathbf{X} & \mathbf{K}_x^d &= -\sigma_0 \Delta x \Delta z \mathbf{X} \\ \mathbf{K}_e^m &= j\omega\mu_0\sigma_0 \mathbf{E} & \mathbf{K}_e^d &= -\sigma_0 \Delta x \Delta z \mathbf{E} \\ \mathbf{K}_{x0}^d &= -\sigma_0 \Delta x \Delta z \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

**Eléments finis nodaux** Dans le cas du modèle par EF, les équations suivantes sont obtenues en se référant aux sections IV.1 et IV.2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x^m &= \mathbf{K}_x & \mathbf{K}_x^d &= \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_e^m &= \mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e^d &= \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{K}_e \\ \mathbf{K}_{x0}^d &= \mathbf{K}_{x0} \end{aligned}$$

## V.2 Problème sans contraintes de couplage

Dans la littérature, la classe de méthodes MGM/CSI est très classique pour résoudre le problème de tomographie de diffraction, en particulier parce qu'elles ne nécessitent pas la résolution répétée d'un modèle direct. Cependant, ces méthodes mélangent des aspects différents :

- le critère à minimiser pour résoudre le problème inverse ;
- le réglage du coefficient de pondération de l'équation de couplage  $\lambda$  ;
- la méthode de minimisation du critère adopté.

Ces différents aspects doivent être dissociés. Le critère à minimiser a un impact sur la qualité de la solution tandis que la méthode de minimisation est utilisée afin de trouver un minimum du critère et n'a, en théorie, aucun impact sur cette solution. Par contre, le choix de l'algorithme a une influence sur la vitesse de convergence. En théorie, ces deux aspects sont complètement distincts. En pratique, un critère ayant certaines caractéristiques intéressantes pour l'optimisation est choisi : caractère quadratique, convexité, etc. Ici, il s'agit de la bilinéarité du critère proposé. Cependant, ce choix n'est pas effectué aux dépens de la qualité de la solution. Quant au coefficient de pondération  $\lambda$  de l'équation de couplage, son impact est double puisqu'il modifie le critère et donc la solution, mais il influence également le conditionnement du problème et a donc un impact sur la vitesse de convergence de l'algorithme de minimisation employé. Dans la suite, ces différents points sont étudiés séparément.

De plus, il existe dans la littérature plusieurs variantes des méthodes de type MGM/CSI, notamment la MR-CSI, et il est difficile de préciser clairement ce qu'est la méthode MGM (Dos Reis et al., 2002; Kleinman and van den Berg, 1992; Premel and Baussard, 2002) ou la méthode CSI (Abubakar et al., 2005; van den Berg and Kleinman, 1997). Néanmoins, l'intérêt principal des

méthodes de type MGM/CSI est la transformation d'un critère non-linéaire en un critère bilinéaire plus facile à minimiser. Ceci permet d'éviter la résolution du problème direct à chaque itération comme c'est nécessaire dans le cas de la méthode NK (Newton-Kantorovich). On considère que l'intérêt principal des méthodes MGM/CSI se résume à cette caractéristique. Les détails sont présentés au chapitre I.

Compte tenu des critères existants (MGM ou CSI) et des réglages possibles de  $\lambda$  (automatique ou non), il est nécessaire d'étudier plus en détails ces points après adaptation aux modèles différentiels afin d'effectuer des choix judicieux. L'adaptation des critères MGM et CSI à notre problème à partir des modèles différentiels développés aux chapitre III et IV est ici présentée. Le préfixe XF est ajouté aux noms de critère afin de montrer qu'il s'agit des critères adaptés aux modèles différentiels, que ce soit le modèle DF ou le modèle EF.

### V.2.1 Critère XF-MGM

La méthode MGM propose de minimiser un critère basé sur les équations d'observation et de couplage écrites sous forme de somme de champs. On réécrit donc les équations d'observation (V.1) et de couplage (V.2) sous une forme proche des équations (I.3) et (I.4) :

$$\Delta Z_\ell = -\mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{C}_x^d \mathbf{e}_\ell \quad (\text{V.5})$$

$$\mathbf{e}_\ell = \mathbf{e}_{0\ell} - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_\ell \quad (\text{V.6})$$

Les détails des calculs pour obtenir cette écriture sont décrits en annexe E. L'équation de couplage précédente représente le champ total  $\mathbf{e}_\ell$  en fonction du champ incident  $\mathbf{e}_{0\ell}$  et du champ diffracté  $-\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_\ell$  à cause du défaut.

Implicitement, dans les méthodes de type MGM/CSI, le problème de tomographie est résolu par la minimisation d'un critère sans contrainte. En adaptant le critère minimisé par les méthodes de type MGM aux modèles directs proposés DF ou EF, le critère suivant est obtenu ; il est appelé XF-MGM par la suite :

$$\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda_{\text{MGM}}) = J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \lambda_{\text{MGM}} J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.7})$$

$$J_1 = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_\ell + \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{C}}_x^d \tilde{\mathbf{e}}_\ell \right\|^2$$

$$J_2 = \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{e}}_\ell + \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{C}}_x^m \tilde{\mathbf{e}}_\ell - \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2$$

$$\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_\ell + \frac{\sigma_0}{q} \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_\ell \right\|^2 + \lambda_{\text{MGM}} \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{e}}_\ell + \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_\ell - \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2 + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.8})$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{M} + \mathbf{K}_{x0} \\ \mathbf{C}_x^d &= \mathbf{K}_x^d - \mathbf{K}_{x0}^d \\ \mathbf{C}_x^m &= \mathbf{K}_x^m - \mathbf{K}_{x0}^m \\ \mathbf{A}_0^{-1} &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{T} & \mathbf{A}_{\text{inv}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Une formulation très proche de celle que l'on peut trouver dans la littérature concernant le critère MGM classique est obtenue (Kleinman and van den Berg, 1992).

Le terme de régularisation  $\phi(\mathbf{x})$  est détaillé dans ce même chapitre à la section V.4.

Toutes les grandeurs surmontées d'un tilde sont les grandeurs prises pour une certaine zone du domaine de calcul qu'on appelle *zone d'intérêt* par la suite. En effet, les lignes de  $\mathbf{C}_x^m$  et de  $\mathbf{C}_x^d$  sont supposées nulles pour les points concernant l'air et l'espace en profondeur en considérant qu'au-delà d'une certaine profondeur, il est inutile de chercher à estimer  $\mathbf{x}$  puisque les données ne

sont plus informatives. La zone de travail peut donc être restreinte, un avantage très important si des problèmes de mémoire se posent. De plus, la bobine n'intervient pas du tout de manière explicite dans ce critère car le terme  $\mathbf{f}_\ell$  a disparu. Seul le champ incident  $\mathbf{e}_{0\ell}$  est nécessaire, le maillage de la bobine peut donc être évité une fois le champ incident calculé.

**Choix de  $\lambda_{\text{MGM}}$**  Dans la méthode MGM, une heuristique est utilisée pour calculer  $\lambda_{\text{MGM}}$  pour un modèle direct intégral. Cette règle empirique est présentée au chapitre I. On adapte cette règle pour le critère XF-MGM proposé :

$$\lambda_{\text{MGM}} = \frac{\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2}{\sum_{\ell} \|\mathbf{e}_{0\ell}\|^2} \quad (\text{V.9})$$

$\lambda_{\text{MGM}}$  ne dépend pas de  $\mathbf{x}$  et est donc constant au cours de la reconstruction. Cependant, le choix automatique de  $\lambda_{\text{MGM}}$  est empirique et n'est pas justifié dans la littérature à notre connaissance. D'autres méthodes pour choisir  $\lambda_{\text{MGM}}$  sont possibles, comme le fixer dès le départ de l'algorithme par essais et erreurs à l'aide de défauts connus.

**Calcul de  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$**  Le calcul de  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  risque d'être très coûteux. Néanmoins, la matrice  $\mathbf{A}_0$  est creuse. L'utilisation d'une décomposition LU peut permettre d'éviter le stockage de la matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$ , d'autant plus que  $\mathbf{A}_0$ , et par conséquent  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$ , ne dépendent pas de la position du capteur et sont constantes. La décomposition LU peut être effectuée une fois pour toutes à l'initialisation. Cependant, la minimisation de  $\mathcal{J}_{\text{MGM}}$  nécessite le calcul du gradient, nécessitant la multiplication par  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  pour chaque position du capteur, ce qui risque de ralentir la minimisation. Pour calculer  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{x}}$ , on propose la décomposition suivante :

$$\begin{pmatrix} z \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{T} & \mathbf{A}_{\text{inv}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

Les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  sont des matrices triangulaires respectivement inférieure et supérieure telles que  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{LU}$ .

## V.2.2 Critère XF-CSI

La méthode CSI est très classique en tomographie de diffraction. Elle propose de minimiser un critère basé sur les équations d'observation et de couplage écrites sous forme de somme de sources de contraste comme c'est le cas pour les équations (I.5) et (I.6). Dans le cas des différences finies, cela est également effectué dans (Abubakar et al., 2008a; Gilmore et al., 2009) pour le médical ou la géophysique. Elle est fortement inspirée de la méthode MGM. Une différence sur le critère concerne l'équation de couplage employée. Celle-ci est pré-multipliée par la matrice contraste pour introduire les sources de contraste  $\mathbf{w}$ . On s'inspire donc de cette transformation en multipliant par la matrice de contraste  $\mathbf{C}_x^m$ . Comme pour le critère XF-MGM, les équations d'observation (V.1) et de couplage (V.2) sont donc réécrites sous une forme proche de celle obtenue par formulation intégrale aux équations (I.5) et (I.6) :

$$\Delta Z_{\ell} = -\mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{w}_{\ell} \quad (\text{V.10})$$

$$\mathbf{w}_{\ell} = \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell} - \mathbf{C}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_{\ell} \quad (\text{V.11})$$

L'équation de couplage (V.11) est obtenue en multipliant à gauche l'équation (V.6) par la matrice  $\mathbf{C}_x^m$  et en faisant le changement de variable  $\mathbf{w} = \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}$ .

Le détail des calculs pour obtenir une telle formulation est à l'annexe E. A partir de ces équations modifiées, on obtient le critère suivant appelé XF-CSI par la suite :

$$\mathcal{J}_{\text{CSI}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \lambda_{\text{CSI}}) = J_1(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \lambda_{\text{CSI}} J_2(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.12})$$

$$J_1 = \sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell} + \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{w}}_{\ell}\|^2$$

$$J_2 = \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} + \tilde{\mathbf{C}}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} - \tilde{\mathbf{C}}_x^m \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2$$

$$\mathcal{J}_{\text{CSI}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} + \frac{\sigma_0}{q} \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} \right\|^2 + \lambda_{\text{CSI}} \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} + \tilde{\mathbf{C}}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} - \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2 + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.13})$$

**Choix de  $\lambda_{\text{CSI}}$**  En s'inspirant de la littérature et de la règle énoncée au chapitre I, on peut approcher le choix classique du coefficient  $\lambda_{\text{CSI}}$  par :

$$\lambda_{\text{CSI}} = \frac{\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2}{\sum_{\ell} \|\mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell}\|^2} \quad (\text{V.14})$$

Cette heuristique pour le choix de  $\lambda_{\text{CSI}}$  ressemble très fortement à celle employée dans la méthode CSI pour un modèle DF (Abubakar et al., 2008a; Gilmore et al., 2009).

Comme dans les méthodes de type CSI, le cas où  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  pose des problèmes pour le calcul de  $\lambda_{\text{CSI}}$ . Ceci est gênant pour l'initialisation du problème. De plus, l'emploi de cette heuristique peut conduire à des solutions dégénérées (Barrière et al., 2009). De plus,  $\lambda_{\text{CSI}}$  dépend de  $\mathbf{x}$  et varie pour chaque itération, le critère minimisé n'est jamais le même à chaque itération et il est difficile de connaître *a priori* le critère minimisé. C'est pourquoi, il est également proposé de fixer manuellement  $\lambda_{\text{CSI}}$  dès le début de la reconstruction (Barrière et al., 2009; Carfantan, 1996).

### V.2.3 Critère XF-Basique

Dans la littérature, les critères MGM et CSI sont basés sur les équations d'observation (I.5) et de couplage (I.6) telles que la résolution par approche intégrale les fournit. La résolution par méthode différentielle procure des équations sous une forme différente. Dans (Abubakar et al., 2008a; Gilmore et al., 2009), les auteurs réécrivent systématiquement les équations électromagnétiques obtenues à l'aide d'un modèle DF sous la même forme que le critère XF-CSI, sans toutefois expliquer les raisons de ce changement si ce n'est introduire les sources de contraste. La seule explication semble être la volonté de revenir à la forme classique des équations sous forme intégrale à partir du modèle DF. Dès lors, on peut se demander s'il existe un réel intérêt à écrire les équations d'observation (V.1) et de couplage (V.2) sous une forme très proche de la formulation intégrale. Le manque d'explication sur la réelle nécessité de revenir à la forme intégrale des équations du modèle laisse penser le contraire.

Un critère différent ne nécessitant pas de modification des équations obtenues après discrétisation est proposé. Celui-ci est très fortement inspiré des critères MGM et CSI. Il s'agit de minimiser l'erreur quadratique sur les équations d'observation (V.1) et de couplage (V.2) afin d'obtenir un critère bilinéaire plus facile à minimiser. Le critère suivant est obtenu ; il est appelé XF-Basique :

$$\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \lambda_{\text{Basique}} J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.15})$$

$$J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} - \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0}^d - \mathbf{K}_x^d) \mathbf{e}_{\ell} \right\|^2$$

$$J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \sum_{\ell} \left\| \mathbf{M} \mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell} \right\|^2$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} - \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) \mathbf{e}_{\ell} \right\|^2 + \lambda \left\| \mathbf{M} \mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell} \right\|^2 + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.16})$$

Contrairement aux critères XF-MGM et XF-CSI, il n'est pas possible de diminuer la zone de travail.

**Choix de  $\lambda_{\text{Basique}}$**  On peut également proposer un calcul de  $\lambda_{\text{Basique}}$  inspiré des règles précédentes :

$$\lambda_{\text{Basique}} = \frac{\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2}{\sum_{\ell} \|\mathbf{f}_{\ell}\|^2} \quad (\text{V.17})$$

$\lambda_{\text{Basique}}$  est constant au cours de la reconstruction car il ne dépend pas de  $\mathbf{x}$ .

**Prise en compte de la bobine** Un inconvénient du critère XF-Basique est la présence du terme d'excitation  $\mathbf{f}_{\ell}$  correspondant à la bobine. Il est calculé en fonction du maillage adapté à la bobine à la position qu'elle occupe. En 3D, avoir un maillage unique adapté à toutes les positions de la bobine peut être difficile. On peut cependant imaginer connaître le champ incident  $\mathbf{e}_0$  pour toutes les positions du capteur, adopter un maillage unique et estimer  $\mathbf{f}_{\ell}$  pour ce maillage unique en utilisant l'équation :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K}_{x0}) \mathbf{e}_{0\ell} = \mathbf{f}_{\ell}$$

Pour calculer  $\mathbf{e}_{0\ell}$  à chaque position du capteur sur le maillage pour l'inversion (ne variant pas d'une position du capteur à l'autre), on peut imaginer calculer le champ incident  $\mathbf{e}_0^*$  avec un maillage parfaitement adapté à la bobine. Une fois le champ  $\mathbf{e}_0^*$  calculé, il peut être utilisé pour obtenir le champ incident au maillage utilisé pour l'inversion à l'aide d'une interpolation.

Après avoir approché le champ électrique incident  $\mathbf{e}_{0\ell}$  pour toutes les positions du capteur, l'équation de couplage devient alors :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{K}_x) \mathbf{e}_{\ell} = \mathbf{A}_0 \mathbf{e}_{0\ell}$$

Le terme  $\mathbf{f}_{\ell}$  disparaît donc du problème. Cette équation permet alors de ne pas avoir à mailler le domaine pour chaque position du capteur tout en permettant de résoudre le problème une fois le champ incident connu pour toutes les positions. L'efficacité de cette possibilité est à étudier. Cette astuce n'est intéressante qu'en 3D, elle n'est donc pas étudiée pour le moment.

## V.2.4 Liens entre les critères

Trois critères ont été présentés précédemment. Le choix du critère à minimiser a un impact sur la solution obtenue c'est pourquoi il ne doit pas être négligé. La seule différence entre les trois critères concerne l'équation de couplage et la norme sur l'erreur de cette équation puisque la régularisation et l'équation d'observation sont inchangées pour tous les critères présentés. Plus précisément, le terme de couplage s'écrit respectivement :

- méthode MGM :  $\|\mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m - \mathbf{e}_{0\ell}\|^2$  ;
- méthode CSI :  $\|\mathbf{w}_{\ell} + \mathbf{C}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_{\ell} - \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell}\|^2$  ;
- méthode Basique :  $\|\mathbf{M} \mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell}\|^2$ .

Les critères MGM et CSI ont déjà été utilisés dans la littérature pour l'inversion mais aucun lien entre eux n'a été exhibé à notre connaissance. De plus, le critère Basique, ici proposé pour un modèle différentiel, n'a jamais été employé dans la littérature. On peut montrer que ces trois termes sont liés à la norme d'un même vecteur d'erreur, pour trois normes quadratiques différentes. En effet, les deux identités suivantes s'établissent facilement :

$$\|\mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m - \mathbf{e}_{0\ell}\|^2 = \|\mathbf{M} \mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell}\|_{\mathbf{A}_{\text{inv}}^{\dagger} \mathbf{A}_{\text{inv}}}^2$$

$$\|\mathbf{w}_{\ell} + \mathbf{C}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_{\ell} - \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell}\|^2 = \|\mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m - \mathbf{e}_{0\ell}\|_{(\mathbf{C}_x^m)^{\dagger} \mathbf{C}_x^m}^2$$

avec la notation  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{M}}^2 = \mathbf{v}^{\dagger} \mathbf{M} \mathbf{v}$ .

Le changement de norme revient à pondérer différemment chaque terme du vecteur d'erreur. Cependant, dans le cas de la méthode CSI la pondération en question dépend de la valeur de  $\mathbf{x}$ .

Le critère fait intervenir l'erreur quadratique sur l'équation d'observation ainsi que l'erreur quadratique sur l'équation de couplage pondérée par  $\lambda$ . Lorsque  $\lambda$  est fini, les trois critères exposés

sont tous différents et par conséquent les minima de chaque critère également. Par contre, lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini, tous les critères sont identiques et contraignent la même équation de couplage. En effet,  $\mathbf{A}_{\text{inv}}^\dagger \mathbf{A}_{\text{inv}}$  est inversible, donc à  $\lambda$  infini les méthodes MGM et Basique respectent l'équation de couplage. A l'inverse  $(\mathbf{C}_x^m)^\dagger \mathbf{C}_x^m$  n'est pas nécessairement inversible puisque lorsque des éléments sont de contraste nul, certaines lignes et colonnes de  $\mathbf{C}_x^m$  sont exactement nulles *i.e.*, :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\ell + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell} &= 0 \Rightarrow \mathbf{w}_\ell + \mathbf{C}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_\ell - \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell} = 0 \\ \mathbf{e}_\ell + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell} &= 0 \not\Rightarrow \mathbf{C}_x^m (\mathbf{e}_\ell + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell}) = 0 \end{aligned}$$

Cependant lorsque  $\mathbf{x}$  est connu et  $\mathbf{w}_\ell + \mathbf{C}_x^m \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_\ell - \mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell} = 0$  alors  $\mathbf{w}_\ell$  est défini de manière unique. Ainsi le critère CSI avec  $\lambda$  infini est équivalent aux critères MGM et Basique.

Malgré ces liens entre les différents critères, aucun élément ne permet de savoir *a priori* quel est le critère à adopter pour obtenir les meilleures reconstructions.

Quel que soit le critère adopté, XF-MGM équation (V.8), XF-CSI équation (V.13) ou XF-Basique équation (V.16), on peut l'écrire de manière générale :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \lambda J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.18})$$

Minimiser ce critère revient à résoudre le problème :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{e}}) = \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{e})} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \text{ s.c. } J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \leq \epsilon_c \quad (\text{V.19})$$

La philosophie de ces méthodes est de tolérer une certaine erreur sur l'équation de couplage en espérant que le non-respect strict a un effet limité voire négligeable sur les résultats. Cette tolérance dépend de  $\lambda$ .

Les critères XF-MGM et XF-CSI sont très proches dans leur principe, c'est pourquoi on propose de n'étudier que la minimisation d'un des deux. En effet, étudier tous ces critères peut être très long. Etant donné que la méthode CSI est la plus utilisée dans la littérature pour la tomographie de diffraction, on choisit d'implémenter le critère XF-CSI. Le critère XF-Basique est développé afin d'éviter toute transformation des équations du modèle. On propose donc d'étudier également ce critère car il est très différent des critères XF-MGM et XF-CSI. En résumé, seuls les critères XF-CSI et XF-Basique sont étudiés par la suite.

## V.3 Problème sous contraintes de couplage

Les méthodes proposées précédemment minimisent le critère de l'équation (V.18). La minimisation de ce critère peut être interprétée comme la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité d'après (Bertsekas, 1996; Idier, 2008) dont la contrainte est réglée par  $\epsilon_c$ . La valeur de  $\epsilon_c$  est liée à  $\lambda$ . Plus  $\lambda$  est élevé, plus  $\epsilon_c$  est petit. Cependant, il est difficile de prédire  $\epsilon_c$  en connaissant  $\lambda$ . L'impact de l'erreur de l'équation de couplage sur la qualité des résultats de reconstruction peut être étudié en minimisant le critère de l'équation (V.18) pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Cette impact est étudié à l'aide des courbes à la figure V.1 sur lesquelles sont représentées l'erreur quadratique moyenne (EQM)

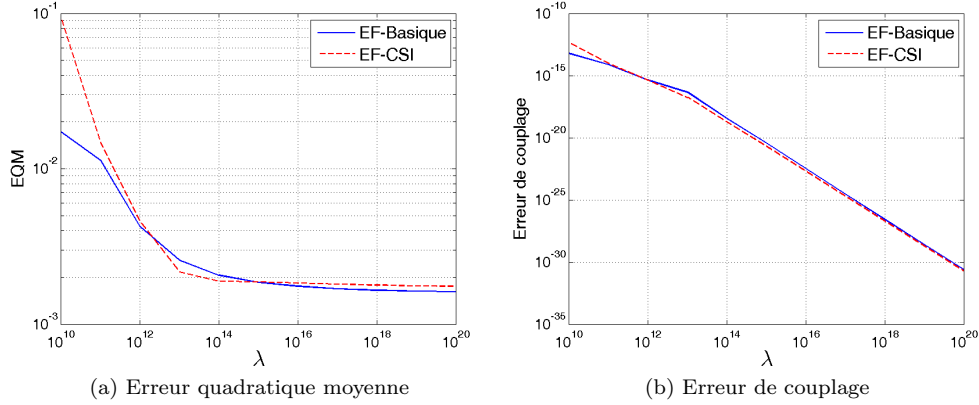
$$\text{EQM}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_e} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2$$

et l'erreur de couplage  $J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  en fonction de  $\lambda$ .

Ces courbes montrent l'importance du choix de  $\lambda$  en termes de qualité de reconstruction. En effet, lorsque  $\lambda$  augmente l'EQM diminue et tend vers une constante. De plus, l'EQM pour les critères EF-Basique et EF-CSI semblent tendre vers des valeurs proches mais légèrement différentes. Lorsque  $\epsilon_c$  tend vers 0 dans l'équation (V.19), la contrainte d'inégalité devient une contrainte d'égalité *i.e.*, lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , le problème devient alors :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{e}}) = \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{e})} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \text{ s.c. } J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = 0 \quad (\text{V.20})$$



FIG. V.1 – Impact du paramètre  $\lambda$  sur la qualité de reconstruction

Néanmoins, prendre  $\lambda$  très élevé ou faire croître  $\lambda$  au fur et à mesure ne sont pas nécessairement de bonnes méthodes pour résoudre le problème sous contraintes d'égalité. En effet, le conditionnement se dégrade avec  $\lambda$ , par conséquent la vitesse de convergence devient extrêmement lente. Ces méthodes sont possibles en théorie mais inapplicables en pratique. C'est pourquoi, une autre solution qu'imposer  $\lambda$  très élevé doit être trouvée.

Il est possible d'obtenir un critère respectant la contrainte de couplage. L'équation de couplage (V.4) permet d'explicitier l'expression d'une variable en fonction de l'autre :

$$\mathbf{e}_\ell = (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x^m)^{-1} \mathbf{f}_\ell, \forall \ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$$

Si l'estimateur MAP est adopté, cela revient à minimiser le critère non-linéaire suivant qu'on appelle par la suite *critère primal* :

$$\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} - \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0}^d - \mathbf{K}_x^d) (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x^m)^{-1} \mathbf{f}_{\ell} \right\|^2 + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{V.21})$$

La dépendance de ce critère par rapport à  $\mathbf{x}$  est implicitement comprise dans les matrices  $\mathbf{K}_x^d$  et  $\mathbf{K}_x^m$ . On ne détaille pas davantage pour éviter la lourdeur de l'expression obtenue.

Minimiser ce critère peut être coûteux compte tenu de l'inversion de matrice. De plus, l'unicité d'un minimum n'est pas du tout assurée. Dans ce cas, le recours à des algorithmes de minimisation globale est envisageable (Idier, 2008) bien qu'ils soient très coûteux. C'est pourquoi dans la suite, le critère  $\mathcal{J}_{\text{NL}}$  n'est pas minimisé sous cette forme lorsque c'est possible.

## V.4 Approche bayésienne

Indépendamment du problème à résoudre, avec ou sans contrainte de couplage, et compte tenu du caractère mal-posé du problème, il est important d'introduire des informations *a priori* sur le défaut à reconstruire afin d'obtenir une solution physiquement acceptable. Les informations *a priori* suivantes sont exploitées :

1. distribution du contraste constante par morceaux : on considère qu'un défaut est constitué d'un seul bloc et a des bords francs ;
2. majorité d'éléments ayant un contraste nul : on suppose que le domaine de calcul est pris grand par rapport à la taille du défaut. Ceci revient à considérer que l'énergie du défaut est limitée ;
3. contraste compris entre 0 et 1 : on fait l'hypothèse qu'un défaut est uniquement dû à un manque de matière et qu'aucune réaction physico-chimique ne se produit (corrosion, dépôt

d'un autre composé, etc.) *i.e.*, la conductivité d'un élément ne peut être plus grande que la conductivité du métal sain *i.e.*,  $\sigma \in [0, \sigma_0]$  ;

4. défaut compris dans une bande de 0 mm à -5 mm : compte tenu du caractère localisé des courants de Foucault et de la profondeur de peau pour la conductivité du métal et de la fréquence de l'onde, il est irréaliste de penser pouvoir estimer la conductivité de points de l'espace en-deçà de 5 mm de profondeur.

Afin de pouvoir tenir compte de toutes ces informations, il peut être utile de revenir à une vision probabiliste de la CSI. En effet, on peut voir le minimum du critère à l'équation (V.12) comme le maximum *a posteriori* (MAP) de la loi *a posteriori*  $p(\mathbf{x}, \mathbf{e} | \Delta Z)$ .

Toutes les informations *a priori* détaillées précédemment doivent être intégrées dans la loi *a priori*  $p(\mathbf{x})$ .

### V.4.1 Champ de Markov

La première information *a priori* importante est le caractère constant par morceaux de la distribution de conductivité. Il convient donc d'étudier et de pénaliser les variations d'un élément par rapport à ses voisins afin de favoriser les solutions d'un seul bloc. Un champ de Markov permet de quantifier la différence entre un élément et ses voisins comme cela est illustré au chapitre I.

Un champ de Markov très classiquement introduit pour pénaliser les variations entre éléments voisins est un *a priori* gaussien sur les variations spatiales de l'objet  $\mathbf{x}$  : c'est la régularisation de Tikhonov. Celle-ci introduit la loi *a priori* suivante :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|^2 \right\} = \exp \{ -\phi(\mathbf{x}) \}$$

La matrice  $\mathbf{D}$  calcule les différences premières entre éléments connexes. Ce terme de régularisation a l'avantage de laisser le critère quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$  si les autres termes du critère le sont, facilitant ainsi la minimisation. Néanmoins, comme on le montre au chapitre VIII, la régularisation de Tikhonov donne des solutions douces car elle pénalise trop fortement les hautes fréquences comme les bords du défaut, ce qui n'est pas acceptable dans notre cas. Il est donc préférable d'utiliser des fonctions de type  $L_2L_1$  afin de mieux prendre en compte cet *a priori* comme cela est présenté au chapitre I. Parmi celles-ci, la fonction hyperbolique est choisie car elle est assez classique et a déjà été employée auparavant dans la méthode EDF-EPM (Goussard and Guichard, 2001). De plus, par rapport à la régularisation employée dans cette même méthode, elle introduit peu de paramètres de réglage :

$$\phi(\mathbf{x}; \beta, \delta) = \beta \sum_{c \in \mathcal{C}_{hv}} \psi(\mathbf{x}_c; \delta) = \beta \psi(\mathbf{D}\mathbf{x}; \delta)$$

$$\psi(u; \delta) = \sqrt{\delta^2 + u^2}$$

La pénalisation  $L_1$  prend mieux en compte le caractère constant par morceaux mais n'est pas exploitable car elle est non-différentiable en 0. Cette non-différentiabilité cause des difficultés de minimisation par la suite alors que le gain en qualité obtenu ne vaut pas nécessairement ces difficultés supplémentaires. Cependant, avec la fonction de pénalisation  $L_2L_1$  il est possible de choisir  $\delta$  très petit afin de faire tendre la fonction hyperbolique vers une norme  $L_1$  plus efficace pour représenter le caractère constant par morceaux. Pour  $\delta = 0$ , le critère est non-différentiable, ce qui complique la minimisation.

A la figure V.2 les différentes fonctions de pénalisation classiquement employées sont tracées :  $L_2$ ,  $L_2L_1$  et  $L_1$

On voit sur cette figure les comportements asymptotiquement quadratique et linéaire de la fonction hyperbolique.

Le champ de Markov peut être représenté à l'aide d'une matrice de différences  $\mathbf{D}$ . Cette matrice traduit la variation de contraste entre les éléments. Dans le cas d'un maillage cartésien régulier,

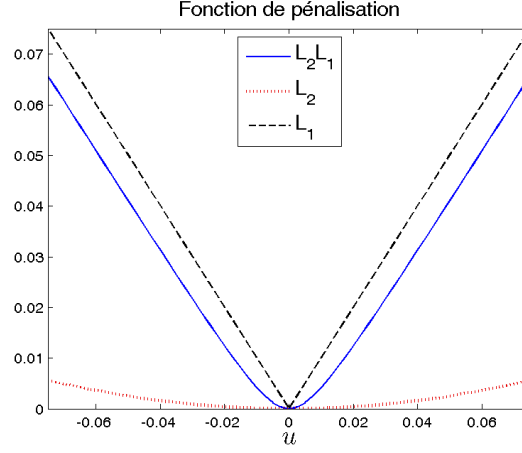


FIG. V.2 – Fonctions de pénalisation

classiquement la matrice  $\mathbf{D}$  est uniquement composée de 1 et de  $-1$ , elle est définie comme *régulière* dans la suite :

$$\mathbf{D}(c, i) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } i \in c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

D'un certain point de vue,  $\mathbf{D}\mathbf{x}$  représente le gradient discret de  $\mathbf{x}$ . Dans le cas d'un maillage triangulaire et/ou irrégulier, il convient de se demander si la matrice  $\mathbf{D}$  doit tenir compte des différences de distances entre les éléments :

$$\mathbf{D}(c, i) = \begin{cases} \pm 1/d_c & \text{si } i \in c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

avec  $d_c$  la distance entre les barycentres des éléments composant la clique  $c$ . Cette matrice est définie comme *irrégulière* dans la suite. Un schéma explicatif est tracé à la figure V.3. Il est possible de normaliser la matrice  $\mathbf{D}$  de façon à ce que l'ordre de grandeur des valeurs de la matrice soit l'unité permettant ainsi d'avoir des valeurs des paramètres du champ de Markov  $\beta$  qui soient assez proches pour les deux matrices.

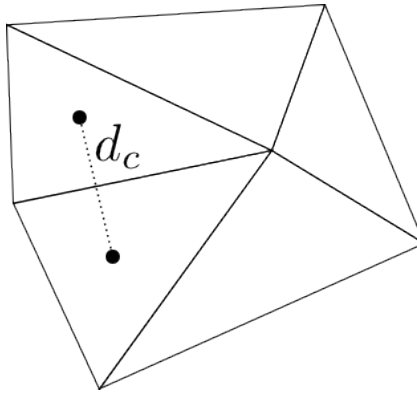


FIG. V.3 – Distance entre deux éléments

Après différents tests, il apparaît que la méthode la plus efficace en termes de qualité de reconstruction et de simplicité consiste à ne pas tenir compte de la taille des éléments dans le champ de Markov. La matrice  $\mathbf{D}$  régulière est alors employée. Ce dernier point est illustré au chapitre VIII.

### V.4.2 Énergie minimale

Le défaut est considéré *a priori* plus petit que la taille du domaine dans lequel la distribution du contraste est estimée. Ceci signifie que la plupart des valeurs sont proches de 0 ou exactement nulles. De plus, compte tenu de l'instabilité du problème, notamment en profondeur, il est préférable de limiter l'énergie du défaut reconstruit. La valeur de  $\mathbf{x}$  est également considérée gaussienne centrée i.i.d. :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \|\mathbf{x}\|^2 \right\}$$

Ceci revient à trouver la solution ayant l'énergie minimale. Cependant, ce terme a tendance à pénaliser trop fortement les hautes valeurs de  $\mathbf{x}$ . De même, il est possible de pénaliser les valeurs de  $\mathbf{x}$  avec une fonction hyperbolique comme cela est effectué pour les variations de  $\mathbf{x}$ . Il est toutefois préférable de régulariser la conductivité relative avec la fonction hyperbolique, les résultats sont montrés au chapitre VIII. La loi *a priori* est donc :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \{ -\gamma \psi(\mathbf{x}; \delta) \}$$

La pénalisation  $L_2L_1$  est intéressante car elle ne pénalise pas trop fortement les valeurs élevées tout en pénalisant les valeurs s'éloignant de 0. Cependant, elle n'introduit pas la parcimonie de manière exacte. Elle tend vers une pénalisation  $L_1$  lorsque  $\delta$  tend vers 0 que l'on préfère utiliser lorsque cela est possible. Celle-ci fait intervenir une norme  $L_1$ , ce qui est équivalent à utiliser une loi *a priori* de Laplace :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \{ -\gamma \|\mathbf{x}\|_1 \}$$

Ce terme agit comme un seuillage doux (Agarwal et al., 2007), il est très utilisé pour le débruitage (Rudin and Osher, 1994) ou la compression (Donoho, 2006). Certains termes de la solution ont une valeur exactement nulle. Ceci peut être profitable pour accélérer les calculs ou diminuer la mémoire nécessaire à la résolution du problème. Cependant, en général, la norme  $L_1$  n'est pas utilisée directement car elle est non-différentiable en 0. Néanmoins, dans notre cas, la non-différentiabilité ne pose pas de problème, puisqu'il est possible de contraindre  $\mathbf{x} \geq 0$ , la norme  $L_1$  est remplacée par la fonction  $\sum_i \mathbf{x}(i)$  différentiable en 0.

Finalement, lorsque les deux *a priori* sont pris en compte, le terme additif de régularisation suivant est obtenu :

$$\phi(\mathbf{x}; \beta, \gamma, \delta) = \beta \psi(\mathbf{D}\mathbf{x}; \delta) + \gamma \|\mathbf{x}\|_1$$

La fonction de régularisation finale permet de tenir compte du caractère constant par morceaux du défaut et de la petite taille du défaut par rapport à la zone d'intérêt. Ce dernier *a priori* permet également d'introduire de la parcimonie qui peut être exploitée pour accélérer la reconstruction. Dans le cas où il n'y a pas de contrainte obligeant  $\mathbf{x}$  à être positif, la norme  $L_1$  est remplacée par la fonction hyperbolique, par la suite cette régularisation est appelée  $L_2L_1$  même si  $L_2L_1 - L_2L_1$  serait plus explicite. S'il est imposé à  $\mathbf{x}$  d'être positif, la norme  $L_1$  peut être employée facilement. Dans ce cas, la régularisation est appelée  $L_2L_1 - L_1$ .

### V.4.3 Contraintes de bornes

Les informations *a priori* précédentes peuvent être exprimées par des fonctions potentiel judicieusement choisies. Les deux derniers *a priori* restants, concernant l'ensemble des valeurs possibles et la profondeur possible du défaut, doivent être pris en compte de manière différente.

Il est connu *a priori* que le contraste est compris entre  $[0, 1]$ . Cette information peut être prise en compte par l'intermédiaire d'une loi *a priori* Bêta (Prémel and Mohammad-Djafari, 1995). Cependant, cette loi favorise certaines valeurs, ce qui devrait être évité. On fait intervenir cette information dans la loi *a posteriori*  $p(\mathbf{x}, \mathbf{e} | \Delta Z)$  par l'intermédiaire de la loi *a priori* de  $\mathbf{x}$ . La loi uniforme  $\mathcal{U}(I_{[0,1]})$  dans  $p(\mathbf{x})$  avec  $I_{[0,1]}$  l'ensemble borné dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 soit :

$$I_{[0,1]} = [0, 1]^{N_e}$$

De plus, compte tenu du caractère surfacique des courants de Foucault, on se limite à estimer la valeur du contraste des éléments possédant au moins un nœud dont la profondeur est comprise entre 0 mm et -5 mm. La zone d'intérêt est ainsi définie. C'est également celle-ci dans laquelle que sont calculées les sources de contraste  $\mathbf{w}$  du critère XF-CSI. Comme précédemment, la loi *a priori* est modifiée afin de tenir compte de cette information, cette fois-ci en faisant intervenir la fonction indicatrice de profondeur  $\mathbb{1}_z(\mathbf{x})$ .

Finalement, la loi *a priori* suivante est obtenue :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp\{-\phi(\mathbf{x})\} \mathcal{U}(I_{[0,1]}) \mathbb{1}_z(\mathbf{x}) \quad (\text{V.24})$$

Etant donné que l'on choisit le maximum *a posteriori* pour estimateur  $\hat{\mathbf{x}}$ , il est possible de considérer que le problème équivalent suivant est résolu :

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{e}) = \arg \min_{\mathbf{x}, e} J_1(\mathbf{x}, e) + \lambda J_2(\mathbf{x}, e) + \phi(\mathbf{x}) \quad \text{s.c. } \mathbf{x} \in [0, 1]^{N_e}$$

L'ensemble des éléments ayant au moins un nœud à une profondeur comprise entre l'interface air/métal et -5 mm est noté  $\tilde{\mathbf{x}}$ , c'est ainsi qu'est définie la zone d'intérêt. Cette notation n'est plus utilisée par la suite, on garde à l'esprit que seule la conductivité relative de certains éléments est estimée.

## V.5 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été proposé l'adaptation des critères minimisés par les méthodes de type MGM/CSI à notre cas de tomographie CF avec un modèle différentiel XF (DF ou EF). Ces critères sont appelés XF-MGM et XF-CSI car les critères minimisés sont les mêmes que ceux minimisés respectivement par les méthodes MGM et CSI. Dans le cas de modèles différentiels, ces critères nécessitent la modification des équations de couplage et d'observation sans véritable justification. C'est pourquoi, le critère XF-Basique très proche des deux autres critères est proposé. Ce critère ne fait intervenir aucune modification des équations de la physique après discrétisation. Ce critère est inspiré de la généralisation des méthodes de type MGM/CSI proposée au chapitre I.

Afin de contourner le caractère mal-posé du problème, une approche bayésienne est adoptée. Elle permet d'introduire et de tenir compte d'informations *a priori* disponibles sur le type de défauts qui doivent être reconstruits. Les informations introduites à l'aide d'un terme de régularisation concernent le caractère constant par morceaux de la distribution de la conductivité ainsi que la petite taille du défaut par rapport à la taille du domaine de calcul. Toutefois, ce terme de régularisation ne permet pas de conserver la linéarité par rapport à  $\mathbf{x}$  lorsque le champ est fixé.

Les critères étant choisis, il est désormais nécessaire de les minimiser pour obtenir une solution au problème de tomographie CF.

# Chapitre VI

## Algorithmes de minimisation

### Sommaire

VI.1	Généralités sur la minimisation . . . . .	80
VI.2	Minimisation sans contrainte : XF-Basique/MGM/CSI . . . . .	80
VI.2.1	Principe . . . . .	81
VI.2.2	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	81
VI.2.3	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	82
VI.2.4	Choix de $\lambda$ . . . . .	84
VI.2.5	Initialisation de l'algorithme . . . . .	84
VI.2.6	Critère d'arrêt . . . . .	84
VI.3	Minimisation sous contraintes : Lagrangien augmenté . . . . .	84
VI.3.1	Principe . . . . .	85
VI.3.2	Adaptation à l'inversion CF . . . . .	86
VI.3.3	Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$ . . . . .	87
VI.3.4	Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$ . . . . .	87
VI.3.5	Critère d'arrêt . . . . .	87
VI.3.6	Réglage de paramètres . . . . .	88
VI.4	Comparaison entre les critères et algorithmes . . . . .	88
VI.4.1	Mémoire . . . . .	88
VI.4.2	Coût de calcul . . . . .	90
VI.4.3	Commentaires . . . . .	91
VI.5	Conclusion . . . . .	91

Au chapitre V, on a proposé d'adapter les critères MGM et CSI classiques aux modèles directs différentiels développés. Les critères XF-Basique et XF-CSI ont ainsi été obtenus. On a également proposé d'adopter une approche bayésienne afin de résoudre le problème de tomographie CF. Celle-ci permet d'obtenir une loi *a posteriori* qui prend compte les données mais également des informations *a priori* sur le défaut. L'estimateur choisi est le maximum *a posteriori* (MAP) ce qui ramène la question de l'estimation du défaut à un problème de minimisation de critère sous contraintes.

Dans ce chapitre, on commence par présenter des généralités sur l'optimisation puis les algorithmes de minimisation sans contraintes pour les équations de couplage en faisant intervenir les critères XF-Basique et XF-CSI. Implicitement, une erreur est autorisée sur l'équation de couplage et elle est réglée à l'aide d'un coefficient  $\lambda$ . Au chapitre V, l'impact sur la qualité des reconstructions d'une erreur sur l'équation de couplage a été illustré. Il a été montré que plus  $\lambda$  est grand et plus cette erreur de couplage est petite et plus les reconstructions sont bonnes. Il est donc proposé

de résoudre le problème en faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini *i.e.*, en contraignant l'équation de couplage. Choisir  $\lambda$  très élevé dans les critères XF-CSI et XF-Basique peut engendrer des problèmes de conditionnement. La méthode de Lagrangien augmenté est incluse dans les critères proposés pour limiter les problèmes de conditionnement tout en contraignant l'équation de couplage. Les méthodes obtenues sont alors appelées XF-AL-CSI et XF-AL-Basique. Malgré la possible présence de minima locaux au critère, on utilise uniquement des algorithmes de minimisation locale qui procurent, dans notre cas, des résultats satisfaisants.

## VI.1 Généralités sur la minimisation

Lorsque l'on cherche à trouver un minimiseur  $\hat{\mathbf{x}}$  d'une fonction coût  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ ,

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{F}(\mathbf{x})$$

il est souvent nécessaire d'avoir recours à un algorithme de minimisation.

Ces algorithmes construisent une suite  $\mathbf{x}^{(n)}$  de manière itérative telle que  $\mathbf{x}^{(n)} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$  lorsque  $n$  est assez grand (voire lorsque  $n \rightarrow \infty$ ) :

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}$$

Les différences entre les nombreux algorithmes de minimisation existants concernent le choix de  $\mathbf{d}^{(n)}$ , la direction de descente à l'itération  $n$ , et  $\alpha^{(n)}$  le pas de descente dans cette même itération.

$\mathbf{d}^{(n)}$  doit être une direction de descente *i.e.*, le critère doit diminuer dans cette direction, pour cela, elle doit vérifier la condition  $(\nabla \mathcal{F})^t \mathbf{d}^{(n)} < 0$ .

Les algorithmes classiques sont les méthodes de gradient et les méthodes de Newton ayant chacune leur propre choix de direction de descente. Les méthodes de gradient utilisent des informations d'ordre 1 pour le choix de la direction de descente tandis que les méthodes de Newton utilisent des informations d'ordre 2.

$\alpha^{(n)}$  est le pas de descente et permet d'assurer la descente du critère. Il doit être choisi avec attention pour assurer une diminution suffisante du critère à chaque itération. Il existe différentes conditions plus ou moins fortes que  $\alpha^{(n)}$  doit respecter. Les conditions d'Armijo ou de Wolfe (Nocedal and Wright, 2006) sont citées à titre d'exemple.

Afin de résoudre le problème de tomographie de diffraction et minimiser les critères étudiés et proposés au chapitre V, on doit choisir un algorithme de minimisation qui convienne.

## VI.2 Minimisation sans contrainte : XF-Basique/MGM/CSI

Au chapitre V, les critères minimisés par les méthodes de type MGM/CSI ont été adaptés aux modèles différentiels étudiés et développés. On a également proposé un critère XF-Basique inspiré de la bilinéarité des critères MGM et CSI, utilisant les équations d'observation et de couplage sans qu'elles soient modifiées. Il a été proposé car les transformations des équations du modèle nécessaires pour obtenir les critères XF-MGM et XF-CSI n'ont jamais été justifiées à notre connaissance.

Dans cette section, on adapte le schéma itératif de minimisation utilisé dans les méthodes de type CSI et non MGM afin de minimiser les critères proposés.

Le schéma de minimisation adopté est celui des méthodes de type CSI pour trois raisons :

1. une fois encore les méthodes de type CSI sont les plus représentées, celles-ci font office de « référence » en tomographie de diffraction ;
2. la minimisation de type CSI tire profit de la bilinéarité des équations par rapport au contraste et à la variable auxiliaire ;
3. l'algorithme de minimisation utilisé dans les méthodes de type MGM ne diminue pas nécessairement à chaque itération (cf section I.2.5).

Est appelée méthode XF-Basique, la méthode minimisant le critère XF-Basique avec le schéma de minimisation alternée inspiré des méthodes de type CSI. De même, on appelle méthode XF-CSI, la méthode minimisant le critère XF-CSI de la même manière.

### VI.2.1 Principe

Le principe général des méthodes de type MGM/CSI est expliqué au chapitre I. Ces méthodes sont basées sur la minimisation du critère à l'équation (V.18). Les équations du modèle, dont l'erreur quadratique est minimisée, sont bilinéaires par rapport à deux variables :

- une variable traduisant le champ électromagnétique (classiquement le champ électrique ou les sources de contraste), que l'on peut qualifier de *variable auxiliaire* car ce n'est pas la grandeur recherchée *in fine* ;
- une variable traduisant le défaut (conductivité ou conductivité relative), que l'on peut qualifier de *variable d'intérêt*.

Ainsi, lorsqu'une des deux variables est fixée, l'équation est linéaire par rapport à l'autre variable. Les méthodes de type CSI exploitent cette caractéristique en minimisant alternativement. Chaque minimisation par rapport à une variable est effectuée en fixant l'autre. L'algorithme est présenté à la table VI.1 dans le cas du critère XF-Basique.

<p><b>Entrées :</b> <math>L</math> le nombre de mesures effectuées par le capteur.</p> <p><b>Sorties :</b> <math>\mathbf{x}</math> l'objet.</p> <p>Calcul du champ électromagnétique incident <math>\mathbf{e}_{0\ell}</math>, <math>\forall \ell \in \llbracket 1, L \rrbracket</math> ;</p> <p>Initialisation : <math>n \leftarrow 1</math>, <math>\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}_0</math>, <math>\mathbf{e}^{(0)} \leftarrow \mathbf{e}_0</math> ;</p> <p><b>répéter</b></p> <p style="padding-left: 20px;">Calcul de <math>\mathbf{K}_x</math></p> <p style="padding-left: 20px;"><b>pour</b> <math>\ell = 1</math> à <math>L</math> <b>faire</b></p> <p style="padding-left: 40px;"><math>\mathbf{e}_\ell^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{e}} \mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{e}; \lambda, \beta, \gamma, \delta)</math> ;</p> <p style="padding-left: 20px;"><b>fin pour</b></p> <p style="padding-left: 20px;">Calcul des matrices et vecteurs pour l'estimation de <math>\mathbf{x}</math> en calculant <math>L</math> matrices <math>\mathbf{K}_e</math> ;</p> <p style="padding-left: 20px;"><math>\mathbf{x}^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}^{(n)}; \lambda, \beta, \gamma, \delta)</math> ;</p> <p style="padding-left: 20px;"><math>n \leftarrow n + 1</math> ;</p> <p><b>jusqu'à</b> Convergence</p> <p>Retourner <math>\mathbf{x}</math>.</p>
---

TAB. VI.1 – Algorithme de minimisation de la méthode XF-Basique

Deux étapes différentes apparaissent dans le schéma itératif pour la minimisation de XF-Basique inspiré de la minimisation CSI :

- la minimisation de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda, \beta, \gamma)$  par rapport à  $\mathbf{e}$  en fixant  $\mathbf{x}$  ;
- la minimisation de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda, \beta, \gamma)$  par rapport à  $\mathbf{x}$  en fixant  $\mathbf{e}$  ;

La table VI.1 ne montre que l'algorithme de minimisation proposé pour le critère XF-Basique. La minimisation du critère XF-CSI est basée sur le même algorithme, le critère minimisé est  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  par rapport à  $\mathbf{w}$  et non  $\mathbf{e}$ . De plus, dans la suite, l'initialisation pour la méthode XF-Basique est présentée. L'initialisation et les critères d'arrêt sont exactement les mêmes pour la méthode XF-CSI.

Etant donné les différences entre ces deux variables, il convient de traiter ces étapes séparément. On présente comment sont menées ces deux opérations.

### VI.2.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$

Le contraste  $\mathbf{x}$  est fixé durant la minimisation de  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda, \beta, \gamma)$  par rapport à  $\mathbf{e}$ . Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$  est fixé, le critère à l'équation (V.12) peut s'écrire :

$$\mathcal{J}_e(\mathbf{e}_\ell) = \mathcal{J}(\mathbf{x}_c, \mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_\ell^\dagger \mathbf{H}_{e\ell} \mathbf{e}_\ell - 2 \Re \left\{ \mathbf{b}_{e\ell}^\dagger \mathbf{e}_\ell \right\} + c_{e\ell} \quad (\text{VI.1})$$



Le critère à l'équation (VI.1) permet de mettre en évidence son caractère quadratique par rapport à  $\mathbf{e}$ . La matrice  $\mathbf{H}_{e\ell}$ , le vecteur  $\mathbf{b}_{e\ell}$  et le scalaire  $c_{e\ell}$  dépendent de  $\mathbf{x}$  et sont détaillés à l'annexe F. Le gradient de cette quadratique par rapport à  $\mathbf{e}_\ell$  est :

$$\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}_e = 2\mathbf{H}_{e\ell}\mathbf{e}_\ell - 2\mathbf{b}_{e\ell}$$

Bien que les variables soient complexes, la minimisation de ce critère est assez simple et un algorithme de gradients conjugués linéaire complexe peut être utilisé à cette fin. L'algorithme en question est présenté à l'annexe D et est tiré de (Barrière et al., 2009).

L'algorithme de gradients conjugués est arrêté lorsque le gradient  $\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}_e$  de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\mathbf{e}_\ell$  a suffisamment décru :

$$\|\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}(\mathbf{e}_p)\|^2 / \|\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}(\mathbf{e}^{(n-1)})\|^2 \leq \epsilon_e = 10^{-2}$$

Le vecteur  $\mathbf{e}$  à la  $p$ -ième itération de l'algorithme de gradients conjugués linéaire est appelé  $\mathbf{e}_p$ .

La minimisation CSI classique n'effectue qu'une itération de GC pour chaque minimisation. Contrairement à cette dernière, il est préférable d'effectuer plusieurs itérations de GC pour faire diminuer le critère et tirer profit de la conjugaison des directions de descente et ainsi accélérer la minimisation. En théorie, le choix de la tolérance  $\epsilon_e$  n'a pas d'impact sur la solution obtenue à la convergence de l'algorithme mais uniquement sur la vitesse de convergence.

$\epsilon_e$  est choisi égal à  $10^{-2}$ , on n'effectue donc pas exactement la minimisation par rapport à  $\mathbf{e}$ . Cette étape est la plus coûteuse dans la méthode et minimiser davantage risquerait de revenir à itérer inutilement. C'est pourquoi la tolérance sur la décroissance du gradient est choisie très lâche.

### VI.2.3 Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

Le critère a l'avantage d'être quadratique par rapport à  $\mathbf{e}$  facilitant ainsi la minimisation par rapport à  $\mathbf{e}$ . Par contre, le critère peut ne pas l'être par rapport à  $\mathbf{x}$  selon le terme de régularisation employé  $\phi(\mathbf{x})$ . Lorsque la variable électromagnétique  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_c$  est constante, le critère s'écrit :

$$\mathcal{J}_x(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_c) = \mathbf{x}^t \mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t \mathbf{b}_x + c_x + \phi(\mathbf{x}) \quad (\text{VI.2})$$

La matrice  $\mathbf{H}_x$ , le vecteur  $\mathbf{b}_x$  et le scalaire  $c_x$  dépendent de  $\mathbf{e}$  et sont également détaillés à l'annexe F. Si on ne tient pas compte du terme de régularisation, il est visible que le critère est quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$ , caractéristique dont tirent profit les méthodes de type MGM/CSI. Dans notre cas, le terme de régularisation est très important. De plus, il ne peut être choisi quadratique car un terme quadratique ne respecte pas les *a priori* choisis et détaillés au chapitre V.

Le gradient du critère par rapport à  $\mathbf{x}$  en fixant  $\mathbf{e}$  est :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_x = 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}_x + \phi'(\mathbf{x})$$

Etant donné qu'il existe différents types de terme de régularisation étudiés, leurs dérivées sont résumées à la table VI.2.

Régularisation	$\phi(u)$	$\phi'(u)$
Tikhonov	$u^2$	$2u$
$L_2 L_1$	$\sqrt{u^2 + \delta^2}$	$u / \sqrt{u^2 + \delta^2}$
$L_1$	$ u $	$\text{sgn}(u)$

TAB. VI.2 – Fonctions de régularisation utilisées et leurs dérivées

La norme  $L_1$  n'est pas différentiable en 0. C'est pourquoi, elle n'est utilisée que lorsque l'on met des contraintes de bornes sur  $\mathbf{x}$  en posant :

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i^{N_e} \mathbf{x}(i)$$

La norme  $L_1$  est alors différentiable en 0. La minimisation de celle-ci ne pose pas de difficulté dans ce cas. La norme  $L_1$  peut uniquement être appliquée sur  $\mathbf{x}$  et non son gradient, car les valeurs du gradient peut être positives comme négatives. De plus, lorsqu'il n'y a pas de contraintes de bornes sur  $\mathbf{x}$ , la fonction de pénalisation utilisée pour le terme de rappel à 0 est la fonction hyperbolique. C'est la même que celle employée pour le champ de Markov.

### VI.2.3.a Sans contraintes de bornes

Lorsque la fonction de régularisation est également quadratique, l'équation (VI.2) est quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$  en fixant  $\mathbf{e}$  et un algorithme de minimisation de gradients conjugués linéaires est employé comme celui utilisé pour la minimisation du critère équation (VI.1). Lorsque la régularisation n'est pas quadratique, il faut utiliser d'autres algorithmes de minimisation. Il est proposé d'utiliser un algorithme de gradients conjugués non-linéaire présenté en annexe D.

L'algorithme de gradients conjugués (linéaire ou non) est arrêté lorsque le gradient  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}$  de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  a suffisamment décréu :

$$\|\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}(\mathbf{x}_p)\|^2 / \|\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}(\mathbf{x}^{(n-1)})\|^2 \leq \epsilon_x = 10^{-10}$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  à la  $p$ -ième itération de l'algorithme de gradients conjugués est appelé  $\mathbf{x}_p$ . Le critère d'arrêt est choisi après différents tests.

Cette étape est très peu coûteuse par rapport à l'étape de minimisation par rapport à  $\mathbf{e}$ , c'est pourquoi on peut se permettre d'être plus exigeant concernant la minimisation du critère par rapport à  $\mathbf{x}$ .

### VI.2.3.b Avec contraintes de bornes

Pour imposer des contraintes de bornes au vecteur  $\mathbf{x}$  telles que  $\mathbf{x} \in [0, 1]^{N_e}$ , il est proposé d'utiliser un algorithme de quasi-Newton à mémoire limitée avec contraintes de bornes L-BFGS-B (Zhu et al., 1997). L'algorithme est présenté en détail, le lecteur intéressé peut se reporter à la lecture de (Byrd et al., 1995). On détaille toutefois les critères d'arrêt car ils ont une importance sur la vitesse de convergence de l'algorithme global. Il existe plusieurs critères d'arrêt pour l'algorithme de L-BFGS-B. Le premier est basé sur la norme  $L_\infty$  du gradient projeté (Byrd et al., 1995) :

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, N_e} \{|\mathbf{x}(i)|\}$$

L'opérateur de projection est défini de la manière suivante (Byrd et al., 1995) :

$$(\mathcal{P}(\mathbf{x}))(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x}(i) \leq 0 \\ 1 & \text{si } \mathbf{x}(i) \geq 1 \\ \mathbf{x}(i) & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit  $\mathcal{J}_x(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}^{(n)}; \lambda, \beta, \gamma)$ . L'algorithme de L-BFGS-B est arrêté lorsqu'au moins une des conditions suivantes est respectée :

$$\|\mathcal{P}(\mathbf{x}_p - \nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}) - \mathbf{x}_p\|_\infty \leq \epsilon_p = 10^{-8}$$

$$|\mathcal{J}_x(\mathbf{x}_p) - \mathcal{J}_x(\mathbf{x}_{p-1})| / |\mathcal{J}_x(\mathbf{x}_{p-1})| \leq \epsilon_x = 10^{-8}$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  à la  $p$ -ième itération de L-BFGS-B est appelé  $\mathbf{x}_p$ . Les critères d'arrêts sont choisis après différents tests. Comme pour la minimisation sans contraintes de bornes, on effectue la minimisation exacte par rapport à  $\mathbf{x}$ .

### VI.2.4 Choix de $\lambda$

Le critère dépend de  $\lambda$  qui a un impact important sur la solution comme le montre la figure V.1. Ce paramètre doit être choisi judicieusement. Comme on le montre au chapitre I, il existe deux possibilités pour le choix de  $\lambda$ . La plus répandue est basée sur la formule empirique basée sur le rapport des erreurs quadratiques des équations d'observation et de couplage (van den Berg and Abubakar, 2001). Au chapitre V, une adaptation de cette heuristique aux critères XF-Basique et XF-MGM est proposée. La seconde méthode est de choisir une valeur de  $\lambda$  efficace par essais et erreurs sur des reconstructions avec des données pour des défauts connus (Barrière et al., 2009).

On préfère fixer  $\lambda$  manuellement au début de la reconstruction. Cependant, le calcul de  $\lambda$  de manière heuristique est très répandue. Par conséquent, l'heuristique adaptée aux modèles DF et EF est également testée par la suite pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI.

### VI.2.5 Initialisation de l'algorithme

Les méthodes XF-Basique et XF-CSI sont initialisées en posant  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}_0$  car la distribution de conductivité avec le défaut est supposée proche de la distribution de conductivité dans le métal sain. De même, on pose  $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{e}_0$  et  $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}$ , car le champ électromagnétique avec défaut n'est pas éloigné du champ électromagnétique incident.

Toutefois, lorsque le réglage de  $\lambda$  adopté est le réglage automatique pour la méthode XF-CSI, et uniquement dans ce cas, il est impossible d'initialiser  $\mathbf{x}^{(0)}$  avec la solution sans défaut  $\mathbf{x}_0$ . On propose alors d'initialiser  $\mathbf{x}^{(0)}$  avec le défaut à reconstruire sur une profondeur de 0,05 mm. En effet, le défaut est localisé en surface de manière assez précise grâce à des techniques de ressuage. En outre, une rapide visualisation des données permet également de le localiser.

### VI.2.6 Critère d'arrêt

Dans les méthodes de type MGM/CSI, l'algorithme est arrêté après un nombre fixé d'itérations. Il peut être plus efficace de diagnostiquer la convergence de la minimisation pour éviter d'itérer inutilement et s'assurer de la convergence de l'algorithme. Il est alors proposé de :

- fixer un nombre maximal d'itérations de CSI à 1000 ;
- calculer la variation relative  $V_{\mathbf{x}^{(n)}}$  de  $\mathbf{x}^{(n)}$  et d'imposer qu'elle soit inférieure  $10^{-10}$  à la convergence.

On définit la variation relative de  $\mathbf{x}^{(n)}$  :

$$V_{\mathbf{x}^{(n)}} = \frac{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|^2}{\|\mathbf{x}^{(n-1)}\|^2} \leq \epsilon_{CSI} = 10^{-10}$$

Tous les paramètres et les critères d'arrêt sont précisés pour les méthodes proposées.

## VI.3 Minimisation sous contraintes : Lagrangien augmenté

Les méthode de types MGM/CSI ne respectent pas l'équation de couplage. Par construction du critère, l'équation de couplage à l'équation (V.2) n'est pas strictement respectée. En effet une erreur est autorisée dont la tolérance dépend de  $\lambda$ . Comme cela est montré au chapitre V et illustré au chapitre VIII, lorsque l'erreur sur l'équation de couplage diminue, l'erreur quadratique moyenne diminue. Dès lors, il est naturel de chercher à respecter strictement cette équation. Comme expliqué au chapitre I, en tomographie de diffraction les méthodes de minimisation sous contraintes très utilisées sont les méthodes de type Born, notamment la méthode de Born distordue équivalente à la méthode NK (Franchois and Pichot, 1997; Soleimani et al., 2006). Cependant, ces méthodes nécessitent la résolution du modèle direct à chaque itération.

Les méthodes de type MGM/CSI peuvent être adaptées pour pouvoir contraindre l'équation de couplage. Théoriquement, il suffit d'imposer  $\lambda$  infini. En pratique, il est impossible d'avoir  $\lambda$  égal à l'infini mais il est possible de le fixer très élevé. Cependant, des problèmes de conditionnement

peuvent se poser lorsque  $\lambda$  est trop important. Une idée naturelle est donc de faire augmenter  $\lambda$  au fur et à mesure des itérations, c'est ainsi que les courbes à la figure V.1 sont obtenues. Cependant, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence de l'algorithme se compte en milliers voire en dizaine de milliers.

Une autre possibilité est d'utiliser une norme  $L_1$  sur l'erreur de l'équation de couplage. En utilisant la norme  $L_1$ , il est connu (Nocedal and Wright, 2006) :

$$\exists \Lambda > 0, \forall \lambda > \Lambda, \|\mathbf{M}\mathbf{e}_\ell + \mathbf{K}_x\mathbf{e}_\ell - \mathbf{f}_\ell\|_1 = 0$$

*i.e.*, il est possible de trouver une valeur de  $\lambda$  à partir de laquelle la contrainte de couplage est exactement vérifiée. Toutefois, celle-ci pose un problème pour la minimisation à cause de la non-différentiabilité en 0 du critère.

Une alternative proposée dans (Carfantan and Mohammad-Djafari, 1997b) est d'utiliser la méthode du Lagrangien augmenté qui permet d'obtenir une méthode très proche des méthodes de type MGM/CSI tout en contraignant l'équation de couplage à la convergence. Cette méthode permet de contraindre l'équation de couplage avec des modifications mineures des critères XF-Basique et XF-CSI.

### VI.3.1 Principe

Afin d'expliquer le principe de la méthode de Lagrangien augmenté, le minimiseur d'un critère  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  est recherché avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sous  $M$  contraintes dans le vecteur  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^M$  tel que  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0$  *i.e.*, on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \mathcal{F}(\mathbf{x}) \\ \text{s.c. } \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Différentes techniques sont utilisables comme la minimisation d'un critère pénalisé. En effet, son principe est proche de celui des méthodes de type MGM/CSI avec un terme quadratique sur l'erreur de couplage et un coefficient de pondération qui augmente au cours des itérations. Cette méthode est d'ailleurs utilisée pour obtenir les courbes de la figure V.1. Pour les raisons expliquées précédemment, il est préférable d'utiliser le Lagrangien augmenté dans notre cas. De plus, il est proche de l'esprit des méthodes de type MGM/CSI nécessitant ainsi peu de modifications. Le Lagrangien augmenté est introduit, il est alors minimisé par rapport à  $(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  et maximise par rapport aux multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\kappa}$  :

$$\mathcal{L}^{(p)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \left(\boldsymbol{\kappa}^{(p)}\right)^t \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \lambda^{(p)} \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|^2$$

L'algorithme de minimisation consiste à itérer la minimisation du Lagrangien augmenté en augmentant  $\lambda^{(p)}$  et en mettant à jour les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\kappa}^{(p)}$ . On utilise la condition d'ordre 1 (Bertsekas, 1999; Dussault, 2008; Nocedal and Wright, 2006) pour la mise à jour :

$$\boldsymbol{\kappa}^{(p+1)} = \boldsymbol{\kappa}^{(p)} + 2\lambda^{(p)} \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(p)})$$

$$\lambda^{(p+1)} = \tau \lambda^{(p)}$$

Il existe également une condition d'ordre 2, plus coûteuse en temps et en calculs, car nécessitant la résolution d'un système linéaire (Bertsekas, 1999) :

$$\boldsymbol{\kappa}^{(p+1)} = \boldsymbol{\kappa}^{(p)} + \left(\mathbf{B}^{(p)}\right)^{-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(p)})$$

$$\mathbf{B}^{(p)} = \left(\nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(p)})\right)^t \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}^{(p)}(\mathbf{x}^{(p)}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)}) \nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(p)})$$

avec  $\nabla_{xx}^2 \mathcal{L}^{(p)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)})$  la Hessienne du Lagrangien par rapport à  $\mathbf{x}$ . Employer cette mise à jour pour les paramètres de Lagrange est très coûteux en calculs à cause de l'inversion. C'est pourquoi, il est proposé dans la suite d'employer uniquement la formule basée sur la condition d'ordre 1.

On se propose d'appliquer cette méthode à notre cas en imposant à  $\mathcal{F}(\mathbf{x})$  de contenir les termes d'adéquations aux données et de régularisation. Les contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  à respecter sont les équations de couplage.

### VI.3.2 Adaptation à l'inversion CF

La méthode de Lagrangien augmenté peut être adaptée à nos modèles DF et EF comme cela a été proposé pour les méthodes de type MGM (Carfantan, 1996). Sont appelées méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI respectivement les méthodes XF-Basique et XF-CSI dont le critère est modifié avec un terme de Lagrangien augmenté. Pour fixer les idées et ne pas compliquer les explications, seule la méthode XF-AL-Basique est présentée. Les idées présentées sont exactement les mêmes pour la méthode XF-AL-CSI.

Dans notre cas, l'inversion à partir d'un modèle différentiel, utiliser le Lagrangien augmenté est identique à la méthode montrée précédemment. Au lieu de minimiser le critère  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda, \beta, \gamma, \delta)$  de l'équation (V.12), le Lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_{\text{AL}}^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)}; \beta, \gamma, \delta)$  est minimisé par rapport à  $(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  et est maximisé par rapport à  $\boldsymbol{\kappa}$ . La solution du problème est alors un point-selle :

$$\mathcal{L}_{\text{AL}}^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}; \beta, \gamma, \delta) = J_1 + \sum_{\ell} \left( \Re \{ \mathbf{t}_{\ell} \} \mid \Im \{ \mathbf{t}_{\ell} \} \right)^t \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^{(p)} + \lambda^{(p)} J_2 + \phi(\mathbf{x}; \beta, \gamma)$$

Ici  $p$  signifie l'indice de la boucle principale de l'algorithme *i.e.*, le nombre d'itérations de Lagrangien augmenté. A la fin de chaque itération de Lagrangien augmenté, le Lagrangien est mis à jour et  $\lambda$  augmente :

$$\boldsymbol{\kappa}_{\ell}^{(p+1)} = \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^{(p)} + 2\lambda^{(p)} \begin{pmatrix} \Re \{ \mathbf{t}_{\ell} \} \\ \Im \{ \mathbf{t}_{\ell} \} \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{(p+1)} = \tau \lambda^{(p)}$$

A la table VI.3, on présente l'équation de  $\mathbf{t}_{\ell}$  selon la méthode adoptée.

	$\mathbf{t}_{\ell} \in \mathbb{C}^{N_n}$
XF-AL-Basique	$\mathbf{M}\mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell}$
XF-AL-CSI	$\mathbf{w}_{\ell} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_{\ell} - \mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell}$

TAB. VI.3 – Equations de  $\mathbf{t}_{\ell}$

Les modifications à apporter aux méthodes existantes XF-Basique et XF-CSI sont minimales et uniquement sur les seconds membres des équations linéaires.

On obtient un algorithme itératif intervenant dans un autre algorithme itératif comme détaillé à la table VI.4. Il a donc deux boucles, l'une englobant l'autre :

1. la boucle principale correspond à la recherche du point-selle du Lagrangien augmenté, à l'augmentation de  $\lambda$  et à la mise à jour du vecteur de Lagrange  $\boldsymbol{\kappa}$  ;
2. la boucle secondaire correspond à la minimisation du Lagrangien augmenté par rapport à  $(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  ou  $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ .

L'algorithme est présenté à la table VI.4 pour le cas XF-AL-Basique.

On voit sur cet algorithme que les modifications à apporter à l'algorithme pour la minimisation des critères XF-Basique et XF-CSI sont minimales :

- ajout d'une boucle englobant la minimisation CSI avec les mises à jour de  $\boldsymbol{\kappa}$  et  $\lambda$  ;
- modifications mineures concernant le calcul du gradient du critère par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$ .

Le peu de modifications nécessaires rend cette méthode d'autant plus intéressante.

**Entrées :**  $L$  le nombre de mesures effectuées par le capteur  
**Sorties :**  $\mathbf{x}$  l'objet  
 Calcul du champ électrique incident  $\mathbf{e}_0$  ;  
 Initialisation :  $n \leftarrow 1$ ,  $p \leftarrow 1$ ,  $\boldsymbol{\kappa}^{(0)} \leftarrow \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}^{(0)} \leftarrow \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{e}^{(0)} \leftarrow \mathbf{e}_0$  ;  
**répéter**  
     **répéter**  
         **pour**  $\ell = 1$  à  $L$  **faire**  
              $\mathbf{e}_\ell^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{e}} \mathcal{L}_{\text{AL}}^{(p)}(\mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)}; \beta, \gamma, \delta)$  ;  
         **fin pour**  
         Calcul des matrices et vecteurs pour l'estimation de  $\mathbf{x}$  ;  
          $\mathbf{x}^{(n)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}_{\text{AL}}^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{e}^{(n)}, \boldsymbol{\kappa}^{(p)}; \beta, \gamma, \delta)$  ;  
          $n \leftarrow n + 1$  ;  
     **jusqu'à** Convergence  
     Mise à jour de  $\boldsymbol{\kappa}_\ell^{(o+1)} = \boldsymbol{\kappa}_\ell^{(p)} + 2\lambda^{(p)}\mathbf{t}_\ell$ ,  $\forall \ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$  ;  
     Mise à jour de  $\lambda^{(p+1)} = \tau\lambda^{(p)}$  ;  
      $p \leftarrow p + 1$  ;  
     **jusqu'à** Convergence  
 Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. VI.4 – Algorithme de la méthode XF-Basique avec Lagrangien augmenté : XF-AL-Basique

### VI.3.3 Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$

A  $\mathbf{x}$  fixé, le Lagrangien augmenté est réécrit de manière à ne faire intervenir que le vecteur  $\mathbf{e}_\ell$  :

$$\mathcal{J}_{e\ell}(\mathbf{e}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}_c, \mathbf{e}) = \mathbf{e}_\ell^\dagger \mathbf{H}_{e\ell} \mathbf{e}_\ell - 2\Re \left\{ \mathbf{b}_{e\ell}^\dagger \mathbf{e}_\ell \right\} + c_{e\ell} \quad (\text{VI.3})$$

Par rapport à l'équation (VI.1), seul les termes  $\mathbf{b}_{e\ell}$  et  $c_{e\ell}$  de l'équation (VI.3) sont modifiés par rapport à XF-Basique et XF-CSI. Leurs expressions sont également détaillées à l'annexe F. Cependant,  $c_{e\ell}$  n'intervient pas dans la minimisation. Les autres termes conservent la même expression que celle obtenue avec le cas sans Lagrangien augmenté.

### VI.3.4 Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

Enfin, à  $\mathbf{e}$  fixé, le critère est réécrit de manière à ne faire intervenir que le vecteur  $\mathbf{x}$  :

$$\mathcal{J}_x(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t \mathbf{b}_x + c_x \quad (\text{VI.4})$$

De même, par rapport à l'équation (VI.2), seuls les termes  $\mathbf{b}_x$  et  $c_x$  de l'équation (VI.4) sont modifiés mais  $c_x$  n'intervient pas dans la minimisation. Leurs expressions sont détaillées à l'annexe F. Les autres termes conservent la même expression que celle obtenue avec le cas sans Lagrangien augmenté. La simplicité de cette modification rend la méthode de Lagrangien augmenté très intéressante.

### VI.3.5 Critère d'arrêt

Tout comme pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI, il est nécessaire de définir un ou plusieurs critères d'arrêt pour chaque étape : minimisation CSI et Lagrangien augmenté. En ce qui concerne la boucle secondaire (minimisation CSI) dont le principe est très proche des méthodes de type MGM/CSI (au terme de Lagrangien augmenté additionnel dans le critère près), le même critère d'arrêt que pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI peut être utilisé *i.e.*, on évalue la variation relative  $V_{\mathbf{x}^{(n)}}$  de  $\mathbf{x}^{(n)}$ , il est imposé qu'elle soit inférieure  $10^{-8}$  :

$$V_{\mathbf{x}^{(n)}} = \frac{\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(n-1)}\|^2}{\|\mathbf{x}^{(n-1)}\|^2} \leq \epsilon_{\text{CSI}} = 10^{-8}$$

Il est également nécessaire de définir le critère d'arrêt pour la boucle principale (Lagrangien augmenté). Compte tenu de l'effort de calcul additionnel provoqué par l'ajout de cette boucle, il est envisageable d'imposer un nombre maximum d'itérations de la boucle de Lagrangien augmenté et d'imposer une décroissance suffisante de l'erreur sur l'équation de couplage par rapport à la première initialisation. Plus clairement, compte tenu de l'initialisation actuelle du champ électrique et du contraste, on définit la grandeur  $\mathbf{t}_\ell^0$  qui est la valeur de  $\mathbf{t}_\ell$  à l'initialisation dont la formule est la suivante :

	$\mathbf{t}_\ell$	$\mathbf{t}_\ell^0$
XF-AL-Basique	$\mathbf{M}\mathbf{e}_\ell + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_\ell - \mathbf{f}_\ell$	$\mathbf{M}\mathbf{e}_{0\ell} + \mathbf{K}_{x0}^m \mathbf{e}_{0\ell} - \mathbf{f}_\ell$
XF-AL-CSI	$\mathbf{w}_\ell + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_\ell - \mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell}$	$-\mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell}$

 TAB. VI.5 – Equations de  $\mathbf{t}_\ell$  et  $\mathbf{t}_\ell^0$ 

La boucle principale du Lagrangien augmenté est arrêtée lorsque le ratio entre  $\sum_\ell \|\mathbf{t}_\ell\|^2$  et  $\sum_\ell \|\mathbf{t}_\ell^0\|^2$  est inférieur à une certaine tolérance  $10^{-15}$ . Ceci revient à imposer une décroissance suffisante du gradient de  $\mathcal{L}_{\text{AL}}$  par rapport à  $\kappa$ . Le critère d'arrêt de la boucle de Lagrangien augmenté est un nombre maximal de 40 itérations ou une décroissance suffisante de l'erreur sur l'équation de couplage :

$$\frac{\sum_\ell \|\mathbf{t}_\ell\|^2}{\sum_\ell \|\mathbf{t}_\ell^0\|^2} \leq 10^{-15}$$

### VI.3.6 Réglage de paramètres

Le réglage des paramètres  $\lambda^{(0)}$  et  $\tau$  peut être difficile. D'après (Bertsekas, 1999),  $\lambda^{(0)}$  doit être choisi judicieusement, en effet :

- s'il est choisi trop élevé, les problèmes de conditionnement se produisent trop tôt ;
- s'il est trop faible, les premières itérations effectuées sont inutiles.

Pour ces mêmes raisons,  $\tau$  doit être choisi ni trop élevé, ni trop faible. D'après (Bertsekas, 1999), certaines règles empiriques existent quant au choix de  $\tau$ . D'après les règles énoncées, il est choisi  $\tau = 2$ . Un choix robuste  $\lambda^{(0)}$  est plus compliqué. Néanmoins, on propose une règle empirique inspirée du calcul du  $\lambda$  de la méthode CSI classique :

$$\lambda^{(0)} = 10^{\lfloor \log_{10} \{u\} \rfloor}$$

$$u = \frac{\sum_\ell |\Delta Z_\ell|^2}{\sum_\ell \|\mathbf{M}\mathbf{e}_{0\ell} + \mathbf{K}_x^m \mathbf{e}_{0\ell}\|^2} \quad (\text{VI.5})$$

Etant donné que l'initialisation est effectuée en posant  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}_0$ , on a  $\mathbf{K}_x^m = 0$ . Bien que les équations de couplage sont différentes, cette heuristique fonctionne pour les deux méthodes.

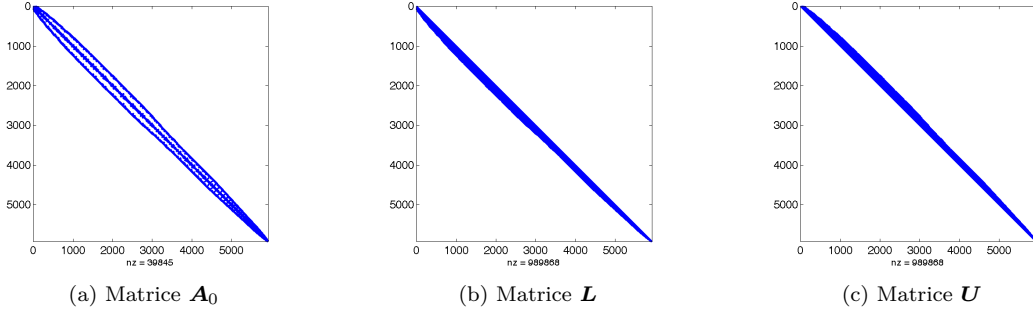
## VI.4 Comparaison entre les critères et algorithmes

Les critères XF-MGM, XF-CSI et XF-Basique ont été proposés au chapitre V. Il est difficile de choisir le critère à adopter *a priori* pour résoudre le problème. Afin d'avoir d'autres éléments de réponse, les coûts en mémoire et de calculs sont étudiés pour la minimisation de ces critères.

### VI.4.1 Mémoire

Une estimation du coût calculatoire et de la mémoire nécessaires pour l'utilisation des différentes méthodes est effectuée. Les multiplications qui interviennent sont complexes. La matrice  $\mathbf{A}_0$  est une matrice creuse de largeur de bande  $2B$ . Soit  $\rho$  le nombre moyen d'éléments non-nuls par

ligne de  $\mathbf{A}_0$ . Typiquement  $\rho \approx 5$  pour les DF et  $\rho \approx 7$  pour les EF. Les valeurs de  $\rho$  sont indiquées pour le cas 2D. En 3D, les matrices ont à peu près les mêmes formes seules les valeurs de  $\rho$  seront modifiées *i.e.*, l'analyse effectuée ici pour la mémoire est la même pour le cas 3D. Les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  obtenues par la décomposition LU de la matrice  $\mathbf{A}_0$  sont aussi des matrices bandes de largeur  $B$  comme le montre la figure VI.1 dans le cas du modèle EF. La largeur de bande est le nombre de colonnes séparant le premier et le dernier élément non-nul d'une même ligne d'une matrice. Il n'y a que  $\rho$  termes non-nuls en moyenne par ligne dans la matrice  $\mathbf{A}_0$  même si la bande est large. Pour les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  c'est beaucoup plus comme le montre la figure VI.1.

FIG. VI.1 – Matrices  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$ 

On voit sur cette figure que la bande des matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  peut être remplie même si la bande de la matrice  $\mathbf{A}_0$  est creuse. De plus, le nombre d'éléments non-nuls dans chaque matrice est indiqué :

- 39845 pour la matrice  $\mathbf{A}_0$  ;
- 989868 pour les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$ .

Le terme de régularisation n'est pas pris en compte dans la liste des opérations suivantes puisqu'il est identique pour toutes les méthodes, négligeable et donc non-discriminant dans l'étude de coût effectuée. Le coût en mémoire de chaque méthode est résumé à la table VI.6. Le coût de la méthode XF-CSI avec le calcul du  $\lambda$  automatique n'est pas indiqué car les coûts sont les mêmes, le coût du calcul de  $\lambda$  est négligeable lorsque  $\lambda$  est calculé de manière heuristique.

Méthode	Coût mémoire	Variables
XF-Basique	$\mathcal{O}(2(L \times N_n + N_e + \rho N_n))$	$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}, \mathbf{M}, \mathbf{K}_x, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0$
XF-CSI	$\mathcal{O}(2(L \times \tilde{N}_n + B \times N_n) + (\rho + 2)\tilde{N}_e)$	$\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{C}}_x, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{L}, \mathbf{U}$
XF-AL-Basique	$\mathcal{O}(3L \times N_n + 2L \times N_e + 2\rho N_n)$	XF-Basique + $\kappa$
XF-AL-CSI	$\mathcal{O}(3L \times \tilde{N}_n + (\rho + 2)\tilde{N}_e + 2B \times N_n)$	XF-CSI + $\tilde{\kappa}$

TAB. VI.6 – Coût mémoire pour les différentes méthodes

La table VI.6 distingue le nombre total de nœuds  $N_n$  et  $\tilde{N}_n$  le nombre de nœuds pour lesquels les calculs sont effectués dans le cadre du critère XF-CSI *i.e.*, les nœuds qui composent la zone d'intérêt. Contrairement à ce qui pourrait être pensé *a priori*  $N_n$  et  $\tilde{N}_n$  sont du même ordre de grandeur. En effet, le maillage est construit de façon à être plus précis au niveau de la zone d'intérêt. Le maillage est donc fin au niveau de celle-ci et plus lâche au-dessus du capteur et en profondeur.

Pour donner une idée, avec le maillage utilisé pour le modèle direct EF en 2D, on a :

- $N_n = 5996$  et  $\tilde{N}_n = 3337$  ;
- $N_e = 11917$  et  $\tilde{N}_e = 6340$ .

Le rapport est de l'ordre de 0,55. Dans le meilleur des cas, on peut avoir  $\tilde{N}_n = N_n/3$  en 2D en diminuant grandement la zone d'intérêt. La différence reste faible en termes de mémoire concernant



les variables  $\mathbf{e}$  pour XF-Basique et  $\mathbf{w}$  pour XF-CSI. De plus  $B$  est de l'ordre de 100. Pour illustrer notre propos, avec le maillage utilisé, l'ordre de grandeur du coût mémoire est présenté à la table VI.7. Il est indiqué en nombre de valeurs complexes à stocker au cours de la reconstruction.

Méthode	XF-Basique	XF-CSI	XF-AL-Basique	XF-AL-CSI
Ordre de grandeur $\approx$	$10^6$	$2.5 \times 10^6$	$1.4 \times 10^6$	$2.8 \times 10^6$

TAB. VI.7 – Coût mémoire pour les différentes méthodes pour le maillage utilisé

en termes de mémoire totale, le gain pour le critère XF-CSI n'est pas aussi intéressant qu'il peut paraître à première vue. Le gain en mémoire obtenu en diminuant le domaine de calcul du champ et du contraste peut être perdu par la mémoire nécessaire pour stocker les matrices. Pour le cas 3D, le ratio entre  $\tilde{N}_n$  et  $N_n$  est difficile à prévoir mais ne devrait pas pouvoir être inférieur à 0,1.

#### VI.4.2 Coût de calcul

On résume à la table VI.8 le coût calculatoire pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI pour une itération de l'algorithme global. Le coût de calcul est basé sur le nombre de multiplications complexes à effectuer. De même, on ne montre pas le coût calculatoire des méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI car seuls les termes  $\mathbf{b}_e$  et  $\mathbf{b}_x$  des critères (VI.1) et (VI.2) sont modifiés.

Méthode	XF-Basique	XF-CSI / XF-CSI avec $\lambda$ auto.
Critère	$\mathcal{O}(L(2\rho + 3)N_n)$	$\mathcal{O}(L(\rho + 3)\tilde{N}_n + 2B \times N_n)$
$\mathbf{b}_{e\ell}$	$\mathcal{O}((2\rho + 1)N_n)$	$\mathcal{O}(2(\rho\tilde{N}_n + B \times N_n))$
Gradient $\backslash \mathbf{e}_\ell$	$\mathcal{O}(4(\rho + 1)N_n)$	$\mathcal{O}(2(4B \times N_n + (2\rho + 1)\tilde{N}_n))$
$\mathbf{b}_x$	$\mathcal{O}(L(2\rho + 1)(N_e + N_n))$	$\mathcal{O}(L(\rho\tilde{N}_e + 2B \times N_n))$
Gradient $\backslash \mathbf{x}$	$\mathcal{O}(2L(\rho + 1)N_e)$	$\mathcal{O}(2L\rho\tilde{N}_e)$

TAB. VI.8 – Coût de calcul pour les différentes méthodes

Le coût du calcul de  $\mathbf{b}_e$  ou de  $\mathbf{b}_x$  est différencié des autres coûts car lors de l'évaluation du gradient, ces vecteurs peuvent être pré-calculés. Le coût affiché pour l'étape *gradient* est le coût calculatoire pour calculer le gradient par rapport à  $\mathbf{e}_\ell/\mathbf{w}_\ell$  ou  $\mathbf{x}$  à chaque fois que cela est nécessaire.

De grandes différences entre les méthodes XF-Basique et XF-CSI apparaissent sur cette table, notamment à cause de la présence de la matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$ . Cette matrice est très coûteuse lorsqu'elle intervient dans une multiplication matricielle. Chaque multiplication par  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  revient à  $2B \times N_n$  multiplications complexes.

Dans les mêmes conditions qu'à la table VI.7, un ordre de grandeur du coût calculatoire nécessaire par méthode est donné à la table VI.9. Les valeurs sont données en nombre de multiplications complexes.

Il apparaît clairement sur cette table que chaque évaluation du gradient pour les méthodes XF-CSI et XF-AL-CSI est beaucoup plus coûteuse que pour les méthodes XF-Basique et XF-AL-Basique. Cependant, c'est le nombre total d'évaluation du gradient qui est discriminant. Or il est difficile de dire combien d'évaluations sont nécessaires pour minimiser le critère.

Méthode	XF-Basique	XF-CSI / XF-CSI avec $\lambda$ auto.
Critère	$7 \times 10^6$	$10^8$
$\mathbf{b}_{e\ell}$	$10^5$	$10^6$
Gradient $\backslash \mathbf{e}_\ell$	$2 \times 10^5$	$8 \times 10^6$
$\mathbf{b}_x$	$2 \times 10^7$	$10^8$
Gradient $\backslash \mathbf{x}$	$2 \times 10^7$	$6 \times 10^6$

TAB. VI.9 – Coût de calcul pour les différentes méthodes pour le maillage utilisé

### VI.4.3 Commentaires

Cependant, dans le cas du critère XF-Basique, il est nécessaire de calculer la variable  $\mathbf{e}_\ell$  dans tout le domaine de calcul. On se rend compte qu'un choix doit être fait entre un critère à minimiser plus simple à calculer, moins coûteux en calculs mais faisant intervenir des variables électromagnétiques sur tout le domaine et à l'inverse un critère représentant le même problème qui nécessite moins de variables à calculer donc moins coûteux en mémoire mais qui est plus difficile à implémenter et plus lourd en calculs par rapport aux critères XF-MGM et XF-CSI.

Le principal inconvénient des critères XF-MGM et XF-CSI est l'intervention de la matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$ . De plus, même si le stockage complet de la matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  est évité, il est nécessaire de garder en mémoire des matrices beaucoup moins creuses comme les matrices  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{U}$  de la décomposition LU de  $\mathbf{A}_0$ . Le stockage de ces matrices peut poser quelques difficultés pour des problèmes de grande taille. A l'inverse, le critère XF-Basique ne fait pas intervenir de matrice à inverser et toutes les multiplications matricielles ne font intervenir que des matrices creuses permettant un gain en calcul. En termes de calculs la minimisation de ce critère est donc moins coûteuse et plus aisée à mettre en œuvre par rapport aux critères XF-MGM et XF-CSI. De plus, si on se reporte à l'équation (I.4), cette matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  est comparable à la matrice de Green  $\mathbf{G}_{22}$ . Dès lors, les reproches formulés contre la formulation intégrale au chapitre II sont également valables : coût mémoire important, matrice pleine, etc. La matrice de Green  $\mathbf{G}_{22}$  à l'équation (I.4) a toutefois une structure exploitable permettant de diminuer le temps de calcul ou la mémoire nécessaire à son stockage. En effet, cette matrice est bloc Toeplitz à blocs Toeplitz dans le cas 2D. Cette structure particulière est également due à la méthode de moments qui emploie un maillage cartésien structuré. Ici  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  n'a aucune structure particulière à cause du maillage triangulaire non-structuré adopté. Toutefois, si chaque évaluation du gradient des critères XF-MGM et XF-CSI est beaucoup plus coûteuse que pour le critère XF-Basique, il faut connaître le nombre total d'évaluations nécessaires pour converger.

## VI.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un algorithme pour la minimisation du critère à l'équation (V.12) est proposé. Il est basé sur la minimisation des méthodes de type CSI *i.e.*, une minimisation alternée du critère par rapport à chacune des variables. Le critère en question est basé sur les erreurs de l'équation d'observation et l'équation de couplage. *De facto* l'équation de couplage n'est pas respectée. Respecter cette équation de couplage, revient à choisir une valeur de  $\lambda$  qui tende vers l'infini. Une méthode de minimisation basée sur le Lagrangien augmenté est proposée afin de contraindre l'équation de couplage en évitant toutefois la résolution répétée du modèle direct comme c'est le cas pour les méthodes de type Born présentées au chapitre I. Les méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI ont l'avantage d'être très proches des méthodes XF-Basique et XF-CSI proposées précédemment. Cependant, il reste à évaluer l'efficacité de ces méthodes, ce qui sera fait aux chapitres VIII et IX.

Les différentes méthodes sont également comparées en termes de mémoire nécessaire pour la

minimisation ainsi qu'en termes de coût de calcul. On remarque que le gain en mémoire de la XF-CSI par rapport à la XF-Basique n'est peut-être pas intéressant compte tenu des matrices à stocker pour effectuer les multiplications par  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$ . Cependant, par construction, le critère XF-CSI ne nécessite pas l'intervention de la bobine par rapport au critère XF-Basique. Toutefois, il a été proposé une méthode pour éliminer le terme de la bobine du critère XF-Basique au moment de l'explicitation du critère XF-Basique. Cette possibilité n'est pas employée pour le moment et peut faire l'objet d'études à l'avenir, notamment lors du passage à la 3D.

**Troisième partie**

**Résultats de reconstruction**



## Chapitre VII

# Méthodologie pour les reconstructions

### Sommaire

VII.1	Capteur . . . . .	95
VII.2	Protocole pour les reconstructions . . . . .	96
VII.2.1	Méthode EDF-EPM . . . . .	96
VII.2.2	Modèle DF . . . . .	96
VII.2.3	Modèle EF . . . . .	97
VII.3	Défauts simulés . . . . .	98
VII.4	Mesure d'erreur . . . . .	98
VII.5	Conclusion . . . . .	99

Au chapitre V différents critères à minimiser pour résoudre le problème de tomographie CF sont proposés et des algorithmes de minimisation sont présentés au chapitre VI. Dans cette troisième partie, on reconstruit des défauts simulés à partir de données CF à l'aide des méthodes proposées.

Cette partie a pour objectifs :

- illustrer l'efficacité des méthodes et des modèles développés
- comparer les approches XF-Basique et XF-CSI ;
- illustrer l'effet de la régularisation ;
- montrer qu'il est possible d'utiliser un seul de réglage de paramètres pour une gamme de défauts ;
- tester l'effet du Lagrangien augmenté.

Cette partie débute en présentant la méthodologie employée pour simuler les données et effectuer les reconstructions. On commence par présenter le capteur utilisé pour les simulations. Puis, le protocole employé pour chaque méthode est détaillé. Etant donné le nombre de modèles, de méthodes et de termes de régularisation proposés il est nécessaire de faire certains choix sur les tests effectués. Enfin on montre les défauts simulés à reconstruire employés pour illustrer l'efficacité des méthodes proposées.

### VII.1 Capteur

Pour effectuer les tests de reconstruction, quel que soit le modèle employé (DF ou EF), le capteur présenté au tableau B.2 de l'annexe B est employé.

Ce capteur est très proche d'un des capteurs employés en pratique par le commissariat à l'énergie atomique (CEA) (Sollier and Premel, 2002). De mêmes, les conditions d'acquisition simulées

sont proches de celles utilisées pour ces capteurs. Les données acquises par ces capteurs sont les données réelles qui seront utilisées à terme pour les reconstructions. Cependant, le propos de cette thèse est surtout méthodologique, même s'il est préférable de simuler des cas proches de la réalité. C'est pourquoi, le capteur simulé est très proche du capteur COM2.

## VII.2 Protocole pour les reconstructions

Compte tenu du nombre de modèles développés, des formes de régularisation possibles, des méthodes proposées et du nombre de défauts simulés, il est difficile et inutile de présenter des résultats pour toutes les combinaisons possibles existantes. Il est préférable d'étudier certains points avec un modèle et d'en tirer des conclusions afin de les appliquer pour la suite et les autres modèles utilisés.

Les méthodes présentées nécessitent le réglage de certains paramètres notamment le coefficient de pondération de l'équation de couplage  $\lambda$  ainsi que les hyperparamètres  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . Ces paramètres sont choisis après différentes reconstructions pour un ou plusieurs défauts connus. On cherche également à montrer qu'il est possible de trouver un choix sous-optimal de ces paramètres qui donne des reconstructions suffisamment proches de celles obtenues avec un réglage optimal pour une grande classe de défauts.

### VII.2.1 Méthode EDF-EPM

Les résultats de la méthode EDF-EPM sont présentés au chapitre VIII. Les défauts et les données simulées à l'aide de COMSOL utilisées pour l'apprentissage sont présentées à l'annexe A. Afin de pouvoir comparer cette méthode avec les méthodes proposées, notamment celles exploitant le modèle EF, seules les données simulées avec COMSOL sont utilisées pour la méthode EDF-EPM. L'ensemble d'apprentissage utilisé est composé de défauts assez différents tout en se limitant à des entailles.

Les reconstructions ont été effectuées sur un ordinateur avec un processeur Intel Core 2 Duo de 3 GHz avec 4 Gb de RAM.

### VII.2.2 Modèle DF

Le modèle DF a été développé au début de l'étude. Il sert notamment à montrer qu'il est possible d'adapter les méthodes de type MGM/CSI à des modèles directs différentiels et non uniquement intégraux pour les CF. Ce passage en modèle différentiel a été effectué au même moment pour le biomédical (Gilmore et al., 2009) et la géophysique (Abubakar et al., 2008a) dans le cas des différences finies pour les méthodes MGM/CSI.

De plus, on cherche à évaluer les différents termes possibles de régularisation ainsi que l'impact de l'utilisation des contraintes de bornes sur les reconstructions. En effet, c'est la régularisation qui a l'impact le plus important sur la qualité de reconstruction, il est donc préférable de débiter l'étude par le choix de la régularisation pour la suite.

La méthode XF-Basique utilisant ce modèle DF est testée avec des données simulées non-bruitées par le modèle DF. On se place délibérément dans un cas de crime inverse (Idier, 2008; Wirgin, 2004). Dans un premier temps, l'objectif est surtout de trouver la fonction de régularisation qui représente le mieux les *a priori* sur le défaut et non de s'assurer de la stabilité de la méthode au bruit de mesures ou de modèle. En effet, la robustesse de la méthode risque de dépendre également du modèle adopté. Sachant que la méthode DF n'est pas la plus adaptée pour la suite, étudier sa robustesse peut être inutile.

Compte tenu de l'erreur du modèle et de l'impossibilité de prendre en compte des phénomènes tels que les discontinuités, il paraît difficile de retenir ce modèle *in fine*. La méthode XF-CSI n'est pas employée avec le modèle DF. Ce modèle direct n'est utilisé qu'afin d'effectuer des tests préliminaires.

### VII.2.3 Modèle EF

Le modèle EF est développé à la suite du modèle DF afin d'obtenir un modèle plus efficace et surtout capable de prendre en compte certains phénomènes physiques impossibles à prendre en compte par le modèle DF notamment les discontinuités de champs dues au variation de conductivité. Ce modèle est testé à l'aide de données simulées par COMSOL afin d'éviter le crime inverse et ainsi s'assurer de la robustesse de la méthode.

Afin de générer des données sans employer les modèles développés, on utilise COMSOL. COMSOL utilise une formulation  $\tilde{A}$ - $V$  avec des éléments de Lagrange d'ordre 2. La simulation des données est effectuée en déplaçant le capteur au-dessus de la plaque. Pour chaque position  $\ell$  du capteur, un maillage  $\Omega_\ell$  adapté au capteur est automatiquement choisi par COMSOL pour plus de précision dans les données simulées. Ceci permet d'obtenir la variation d'impédance pour le défaut à reconstruire. Pour les tests de reconstruction, un seul maillage  $\Omega$  est adopté pour tous les défauts et pour toutes les positions prévues du capteur, il est représenté à la figure VII.1. Il serait difficile d'avoir un maillage différent pour chaque position du capteur et d'effectuer la reconstruction avec ces différents maillages. De plus, étant donné que le maillage  $\Omega$  est utilisé pour toutes les reconstructions, il n'est pas adapté à tous les défauts, il existe des erreurs de discrétisation.

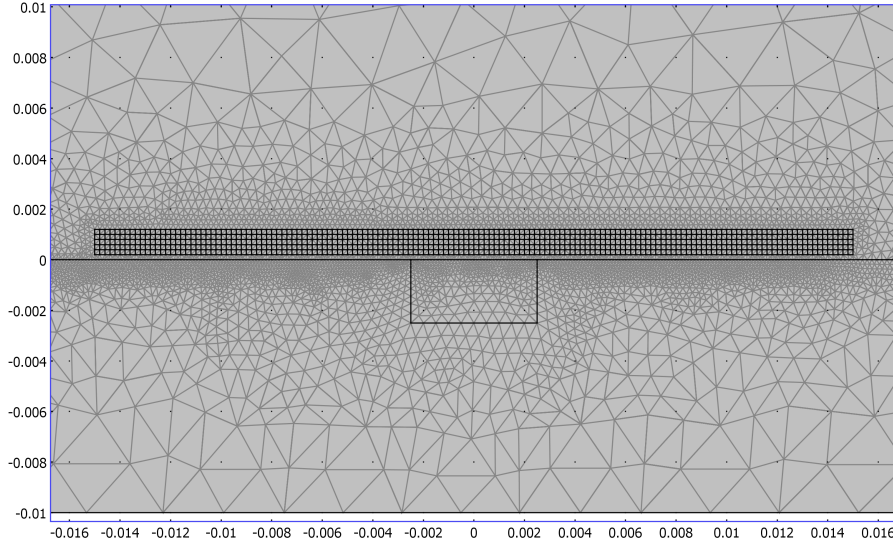


FIG. VII.1 – Maillage  $\Omega$  utilisé pour l'inversion (axes en mètre)

Le capteur est compris dans la zone comprenant un maillage cartésien subdivisé par des triangles, ceci permet de déplacer le capteur plus facilement sans avoir à remailler le domaine à chaque position.

L'introduction d'un maillage triangulaire et surtout irrégulier non structuré nous oblige à étudier le champ de Markov à travers la matrice  $\mathbf{D}$  des différences premières. Il est nécessaire d'étudier si les dimensions des éléments du maillage doivent être pris en compte ou non dans cette matrice.

En outre, la méthode XF-CSI est également introduite pour le modèle EF afin d'effectuer des comparaisons avec la méthode EF-Basique. L'objectif est de déterminer si les différences entre ces deux critères sont importantes et lequel doit être choisi.

L'impact de  $\lambda$  sur la qualité des reconstructions est également illustré. Il est montré que contraindre l'équation de couplage est important. A cette fin, on introduit le Lagrangien augmenté présenté au chapitre VI. Les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont également testées. De plus, pour étudier la robustesse des méthodes et du réglage de paramètres proposé, différents



défauts sont reconstruits en fixant les paramètres de réglage. Pour le réglage des paramètres, des défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur sont employés. Puis, ce réglage est utilisé pour d'autres défauts qui n'ont pas servi à choisir les paramètres, comme le défaut « long » et des défauts différents avec une profondeur comprise entre 0,6 mm et 2,5 mm. Ce procédé est proche de la validation croisée.

### VII.3 Défauts simulés

Tout au long de l'étude effectuée dans les chapitres VIII et IX, le défaut de 1 mm de profondeur et de 5 mm de largeur est reconstruit. Il est à nouveau présenté à la figure VII.2 ainsi que les données COMSOL simulées pour le capteur présenté dans les conditions d'acquisition énoncées.

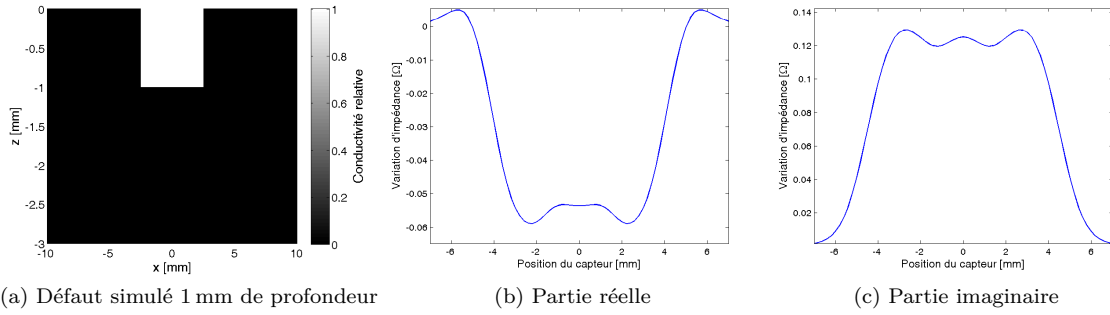


FIG. VII.2 – Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm : défaut (a), parties réelle (b) et imaginaire (c)

On teste les méthodes avec d'autres défauts. De manière générale, entre les défauts seule la profondeur varie. En effet, la reconstruction en profondeur du défaut est beaucoup plus difficile à effectuer. On reconstruit également les défauts présentés à la figure VII.3.

L'utilisation de ces défauts pour l'inversion a pour objectifs d'étudier l'effet de la profondeur sur la qualité de reconstruction. En effet, c'est en profondeur que se situe la difficulté du problème.

### VII.4 Mesure d'erreur

Afin d'étudier l'efficacité de la méthode de reconstruction, on étudie l'évolution d'un critère d'erreur par rapport à la solution exacte  $\mathbf{x}^*$  l'*erreur quadratique relative* (EQR). L'EQR est définie par la relation suivante Barrière et al. (2009) :

$$\text{EQR} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2}{\|\mathbf{x}^*\|^2} \quad (\text{VII.1})$$

Lorsque la discrétisation ne permet de représenter le défaut  $\mathbf{x}^*$  sans erreur, l'élément prend la valeur du ratio entre la surface de l'élément dans le défaut et la surface totale de l'élément.

Une autre mesure possible pour évaluer les reconstructions est d'estimer leurs dimensions. Pour évaluer la profondeur  $d$  du défaut reconstruit, on calcule la somme continue  $i_z$  du contraste suivant une ligne horizontale  $v_z$ . La somme est comparée par rapport à  $i_0$  la valeur de  $i_z$  pour  $z = -0,05$  mm.  $i_z$  est défini de la manière suivante :

$$i_z = \int_{v_z} c(x, z) dx$$

$i_z$  est calculée pour un ensemble de différentes profondeurs. Les profondeurs pour lesquelles  $i_z$  est inférieure à un seuil sont considérées comme appartenant au métal. On définit le seuil par  $i_0/2$ .

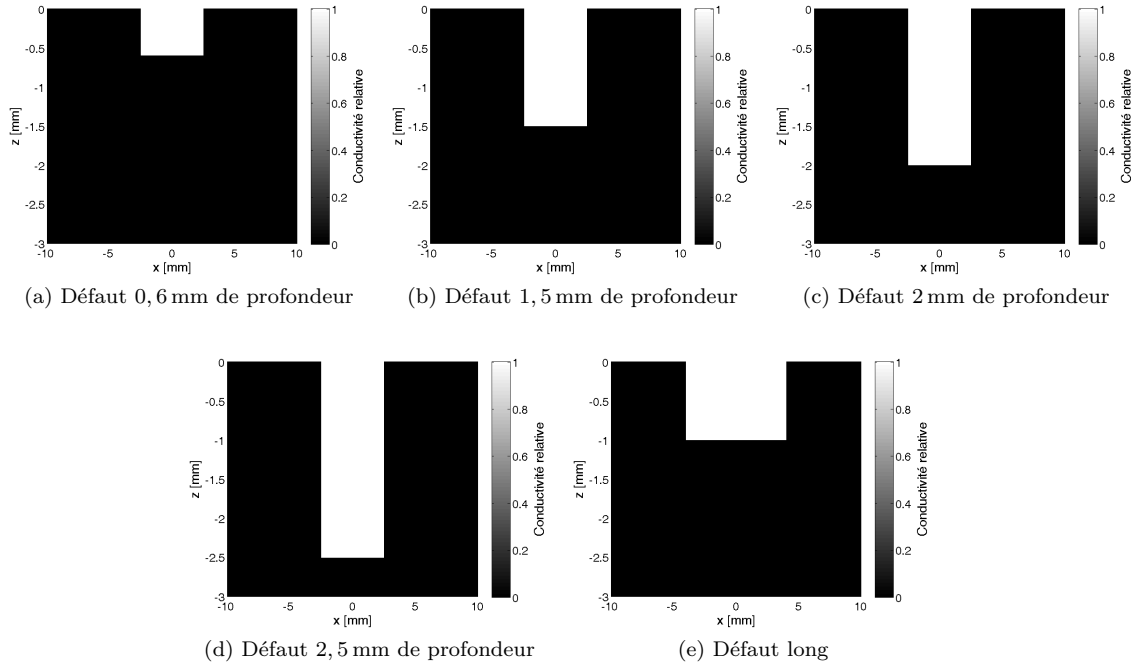


FIG. VII.3 – Défauts simulés pour la reconstruction

On utilise le même principe pour estimer  $x_g$  et  $x_d$  les positions respectivement à gauche et à droit des bords verticaux du défaut.

Cette méthode revient à projeter le défaut reconstruit suivant un axe donné et à seuiller les projections obtenues pour déterminer la profondeur ou la largeur du défaut estimé.

## VII.5 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre la méthodologie employée pour tester et éprouver les méthodes d'inversion proposées.

Les données et défauts testés ne sont pas les mêmes d'un modèle à l'autre. De même les études sont différentes pour chaque modèle. On résume dans la liste suivante les conditions des tests effectués au chapitre VIII :

- méthode EDF-EPM :
  - données simulées par COMSOL ;
  - étude d'efficacité.
- modèle DF :
  - données simulées par DF ;
  - étude de la régularisation ;
  - étude des contraintes de bornes.
- modèle EF :
  - données simulées par COMSOL ;
  - étude de la matrice des différences finies pour le champ de Markov.

Ces tests ont pour but de montrer qu'un modèle différentiel peut être utilisé pour la tomographie par CF de manière efficace. De plus, plusieurs critères ont été proposés, il s'agit d'étudier leurs différences en terme d'efficacité et de coût de calcul. Enfin, l'impact de  $\lambda$  ainsi que les réglages heuristiques proposés sont également étudiés.

Le chapitre IX est consacré à l'étude de l'effet du Lagrangien augmenté sur les reconstructions

pour le modèle EF avec les critères EF-Basique et EF-CSI. L'objectif est de montrer que choisir une valeur de  $\lambda$  qui tende vers l'infini améliore les reconstructions. De plus, les deux méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont comparées en terme de temps de calcul et d'efficacité.

## Chapitre VIII

# Reconstructions sans contraintes sur l'équation de couplage

### Sommaire

VIII.1	Méthode EDF-EPM . . . . .	102
VIII.2	Modèle DF . . . . .	103
VIII.2.1	Régularisation par fonction potentiel . . . . .	103
VIII.2.2	Contraintes de bornes . . . . .	105
VIII.2.3	Conclusion . . . . .	106
VIII.3	Modèle EF . . . . .	106
VIII.3.1	Champ de Markov . . . . .	106
VIII.3.2	Etude de la méthode XF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur	107
VIII.3.3	Etude pour différents défauts . . . . .	110
VIII.3.4	Comparaison des méthodes développées . . . . .	111
VIII.3.5	Impact de $\lambda$ sur les reconstructions . . . . .	118
VIII.4	Conclusion . . . . .	119

On cherche à évaluer l'efficacité des méthodes de reconstruction basées sur la minimisation des critères présentés aux chapitre V avec les algorithmes proposés au chapitre VI. Devant le nombre de modèles directs proposés, les différents termes de régularisation possibles et l'ajout éventuel de contraintes, il est nécessaire de faire certains choix et de limiter certaines études à des modèles. Le but est d'exploiter les conclusions de ces études pour les autres modèles sans avoir à les effectuer à nouveau. Un objectif de ce chapitre est de prouver que les modèles directs différentiels, comme les différences finies et surtout les éléments finis, peuvent être employés pour les méthodes de type MGM/CSI. Enfin, un autre des objectifs est d'apporter des éléments de réponse sur le critère à adopter ainsi que sur le choix de  $\lambda$ .

L'étude débute avec la méthode EDF-EPM afin d'illustrer les limites de la méthode en termes de qualité de reconstruction et ainsi justifier nos travaux. Elle se poursuit avec le modèle DF pour déterminer le terme de régularisation additif adapté aux défauts à reconstruire. De plus, l'impact des contraintes de bornes sur les résultats de reconstruction est étudié avec le modèle DF. Ce modèle direct ne peut pas être utilisé en pratique car il ne permet pas de prendre en compte les phénomènes électromagnétiques complexes. Toutefois, il est facile à mettre en œuvre et permet d'effectuer des études préliminaires importantes.

Le modèle EF est utilisé pour pallier ces difficultés de modélisation. Le maillage triangulaire non-structuré, généralement employé par ce modèle, impose des modifications concernant la régularisation. Le champ de Markov à employer pour représenter au mieux les défauts est étudié

pour savoir s'il est nécessaire ou pas de tenir compte de la géométrie du maillage. L'impact du paramètre  $\lambda$  sur les reconstructions est également étudié en termes de qualité et de nombre d'itérations. Il est également prouvé qu'un réglage sous-optimal robuste de la méthode est possible en reconstruisant de nombreux défauts de différentes profondeurs. En outre, le critère XF-CSI est testé avec ce modèle pour étudier l'impact du choix du critère sur les reconstructions.

## VIII.1 Méthode EDF-EPM

Le modèle direct de la méthode EDF-EPM est présenté au chapitre II et montre une médiocre adéquation aux données COMSOL. Les paramètres de réglage sont choisis après différents tests sur les défauts de 1 mm et de 2 mm de profondeur. L'ensemble d'apprentissage est choisi de manière à employer des défauts différents et est illustré à l'annexe A :

- un défaut carré de 1 mm de largeur et 1 mm de profondeur ;
- un défaut profond de 4 mm de largeur et 3 mm de profondeur ;
- un défaut de 5 mm de largeur et de 1 mm de profondeur ;
- un défaut transverse de 0.6 mm de largeur et de 1.4 mm de profondeur.

Afin d'illustrer les problèmes de la méthode EDF-EPM, on montre les reconstructions des défauts de plusieurs profondeurs à la figure VIII.1.

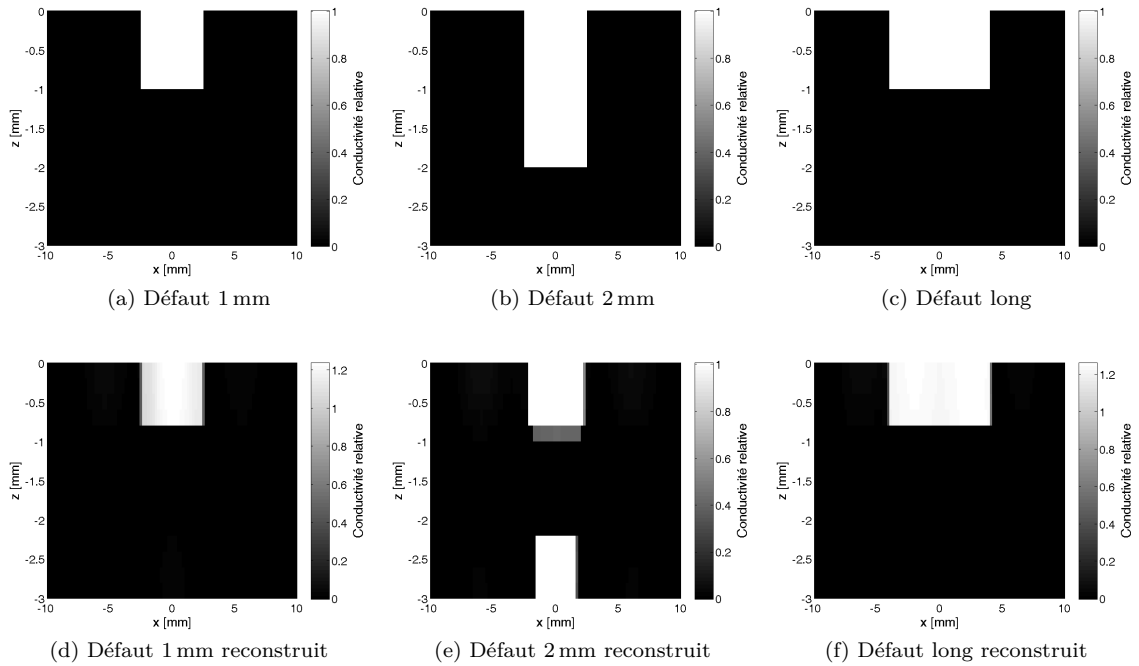


FIG. VIII.1 – Reconstructions avec la méthode EDF-EPM

Il apparaît sur cette figure que la méthode EDF-EPM n'est pas efficace avec l'ensemble d'apprentissage utilisé. De plus, le défaut de 1 mm de profondeur et 5 mm de largeur n'est pas reconstruit efficacement alors qu'il fait partie de l'ensemble d'apprentissage. On pourrait penser *a priori* que la méthode doit être plus efficace sur les défauts appartenant à l'ensemble d'apprentissage. Enfin, il semble que la méthode ait quelques difficultés à reconstruire les défauts au-delà de 0,8 mm de profondeur.

Tous ces résultats justifient le recours aux critères proposés au chapitre V et aux méthodes de minimisation au chapitre VI. L'objectif de cette section est d'illustrer simplement les limites de la méthode EDF-EPM. D'autres reconstructions sont proposées à l'annexe G afin d'illustrer

l'inefficacité de la méthode.

## VIII.2 Modèle DF

Le modèle DF est simple à implémenter, c'est pourquoi il a été implémenté. Il permet de montrer qu'il est possible d'employer un modèle direct différentiel pour la tomographie CF. De plus, il est utilisé afin d'étudier la régularisation à employer pour représenter au mieux les *a priori* disponibles sur le défaut. L'objectif de cette section est d'illustrer l'impact de la régularisation sur les reconstructions que ce soit les fonctions de pénalisation ou les contraintes de bornes.

### VIII.2.1 Régularisation par fonction potentiel

Dans le chapitre I, différents termes de pénalisation utilisables pour régulariser sont présentés. La pénalisation la plus classique est celle de Tikhonov. Compte tenu du caractère constant par morceaux du défaut recherché, ce type de pénalisation n'est pas adapté car elle lisse les reconstructions. La fonction hyperbolique est donc employée pour mieux tenir compte de la distribution constante par morceaux de la conductivité. Pour illustrer les effets de la régularisation sur les reconstructions, des reconstructions sont présentées dans les cas sans régularisation et avec les deux types de régularisation  $L_2$  et  $L_2L_1$  pour le champ de Markov et le rappel à 0 présentés au chapitre I. L'étude débute sans imposer de contraintes de bornes sur le contraste.

Après différents tests, un réglage des paramètres adapté est obtenu. Le coefficient de pondération de l'équation de couplage est choisi tel que  $\lambda = 10^{-15}$  et les paramètres de régularisation sont également imposés  $(\beta, \gamma, \delta) = (10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-2})$ . Pour toutes les reconstructions  $\delta = 10^{-2}$  est choisi pour la pénalisation  $L_2L_1$ .  $\delta$  est le paramètre qui permet de régler la transition du comportement linéaire au comportement quadratique de la fonction de pénalisation. Ce paramètre est donc choisi en fonction de la variation entre la valeur 0 et 1. Une règle empirique utilisable est imposer  $\delta$  tel que  $\delta = V/100$  avec  $V$  la différence entre la valeur la plus haute et la valeur la plus faible de  $\mathbf{x}$ . Dans le cas présent,  $V = 1$ . Les résultats de reconstruction sont présentés à la figure VIII.2.

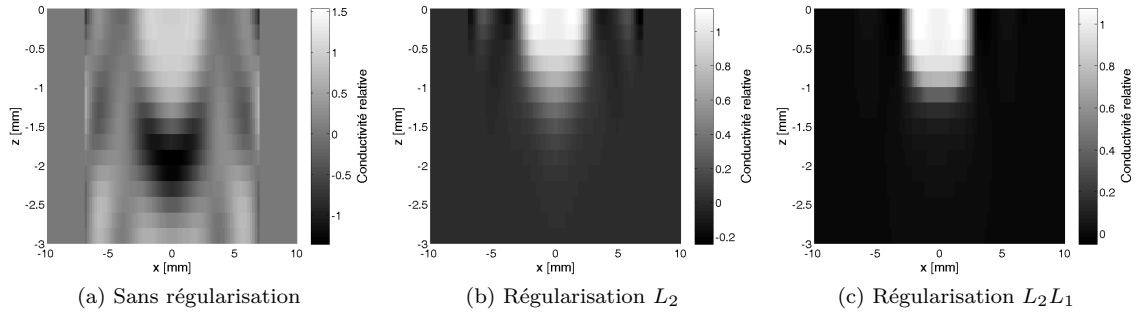


FIG. VIII.2 – Effet de la régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur sans contraintes de bornes et sans bruit

Il apparaît sur cette figure que le minimum du critère non-régularisé procure une solution très éloignée du défaut simulé. Le problème d'unicité apparaît pour le cas non-régularisé. En effet, une solution respectant les données est exhibée alors qu'elle n'est pas physiquement acceptable et qu'elle ne correspond pas au défaut simulé. De plus, le défaut simulé correspond aux données, il y a donc au moins deux solutions qui respectent les données. De plus, on voit qu'au niveau du défaut, surtout à proximité de la surface, le contraste est supérieur à 1. En dessous de 1,5 mm le contraste est inférieur à 0, compensant ainsi le trop fort contraste en surface. La régularisation est donc nécessaire pour obtenir une solution physiquement acceptable.

La solution régularisée avec la pénalisation  $L_2$  est physiquement plus admissible que celle obtenue sans régularisation. Cependant, comme cela était prévisible, la solution est lisse. Ce terme de pénalisation n'est donc pas le plus indiqué. L'utilisation de la fonction hyperbolique (pénalisation  $L_2L_1$ ) améliore les résultats et semble représenter le défaut de manière plus efficace. C'est celle-ci qui est adoptée pour la suite de l'étude.

Quelle que soit la régularisation adoptée, il semble que le défaut se diffuse vers la profondeur comme la chaleur se diffuse dans un corps. Il est difficile de savoir d'où provient ce phénomène, qui se produit qu'il y ait de la régularisation ou non. Les défauts reconstruits semblent être érodés sur les bords en profondeur. Cet autre phénomène ne semble pas provenir de la régularisation puisqu'il se produit également lorsque la reconstruction n'est pas régularisée.

Afin d'illustrer séparément les effets de chaque *a priori*, on présente à la figure VIII.3 différentes reconstructions avec un seul *a priori* (champ de Markov ou rappel à 0) et une reconstruction en utilisant les deux *a priori* pour le défaut de 1 mm de profondeur. Le terme de pénalisation employé est  $L_2L_1$ .

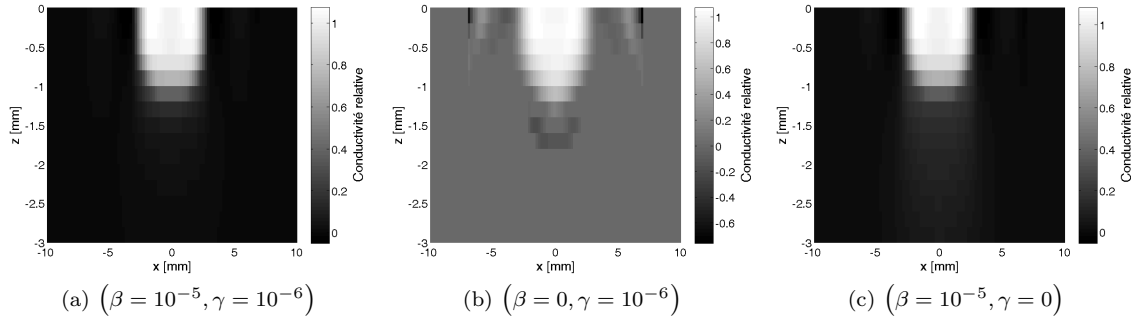


FIG. VIII.3 – Effet des différents termes de régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

Il est visible sur cette figure que le champ de Markov permet d'éviter de fortes variations spatiales de conductivité relative par rapport au cas non-régularisé. Les effets du terme de rappel à 0 sont moins spectaculaires. Toutefois, il peut être remarqué que la reconstruction est plus stable par rapport au cas non-régularisé. Il peut également être observé que le défaut se diffuse moins profondément lorsque les deux régularisations sont prises en compte. C'est pourquoi, on liste, au tableau VIII.1, l'EQR (définie par l'équation (VII.1)) à la fin des trois reconstructions présentées à la figure VIII.3.

$(\beta, \gamma)$	$(0, 0)$	$(10^{-5}, 10^{-6})$	$(10^{-5}, 0)$	$(0, 10^{-6})$
EQR	3.92	$9.59 \times 10^{-2}$	$1.23 \times 10^{-1}$	$1.37 \times 10^{-1}$

TAB. VIII.1 – EQR des reconstructions pour différents couples  $(\beta, \gamma)$  pour le défaut de 1 mm de profondeur

Le calcul de l'EQR montre que le champ de Markov améliore énormément la qualité des résultats. Si l'effet du terme de rappel à 0 est peu visible à la figure VIII.3, force est de constater, qu'en termes d'EQR, l'effet est important comme le montre la table VIII.1.

On remarque également aux figures VIII.2 et VIII.3 que le contraste prend des valeurs supérieures à 1 et inférieures à 0 ce qui physiquement n'a pas de sens. Contraindre le contraste à avoir des valeurs physiques peut améliorer les résultats et stabiliser le problème.

### VIII.2.2 Contraintes de bornes

Comme cela est proposé au chapitre V, on contraint le vecteur  $\mathbf{x}$  à appartenir à  $[0, 1]^{N_e}$ . Des reconstructions sont effectuées avec ces contraintes sans régularisation additive, avec la régularisation  $L_2$  et avec la régularisation  $L_2L_1$ . Cette fois, il est choisi  $(\beta, \gamma, \delta) = (10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-2})$  pour les hyperparamètres. Le coefficient de pondération est maintenu comme précédemment  $\lambda = 10^{-15}$ . Les reconstructions sont présentées à la figure VIII.4.

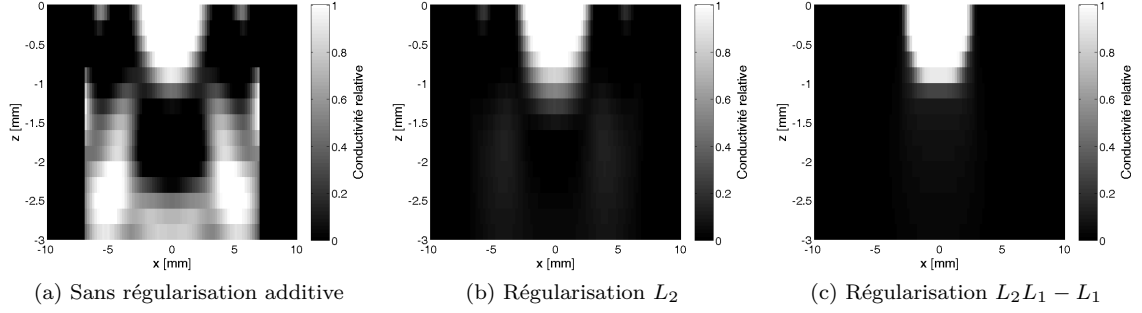


FIG. VIII.4 – Effet de la régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur avec contraintes de bornes

L'utilisation des contraintes de bornes permet d'obtenir une solution physiquement plus admissible lorsqu'il n'y a pas de régularisation additive. Le défaut à reconstruire y apparaît de manière plus claire. De plus, le caractère instable du problème mal-posé apparaît plus clairement, puisque les pixels en profondeur prennent des valeurs différentes de 0 sans que ceci n'ait un impact significatif sur les données reconstruites. La régularisation de Tikhonov lisse toujours le défaut et on remarque que la régularisation  $L_2L_1 - L_1$  prend mieux en compte les spécificités du défaut. Les bords de la reconstruction sont plus francs avec la régularisation  $L_2L_1 - L_1$  notamment grâce le terme  $L_1$  de rappel à 0 qui agit comme un seuillage.

Pour étudier l'efficacité des termes de régularisation proposés, l'EQR au cours des itérations est tracée à la figure VIII.5.

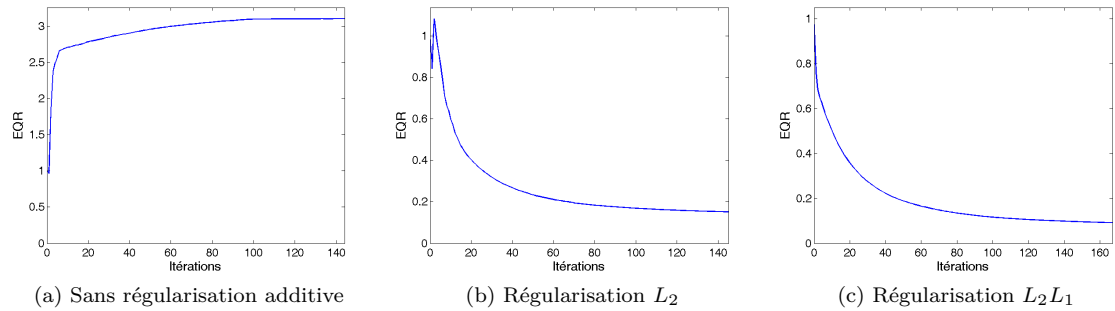


FIG. VIII.5 – EQR pour DF-Basique au cours des itérations pour le défaut de 1 mm de profondeur

On voit sur cette figure que l'EQR augmente lorsqu'il n'y a pas de régularisation, illustrant une fois encore la nécessité de régulariser. *A contrario*, quelle que soit la régularisation, l'EQR diminue au cours des itérations. La régularisation  $L_2L_1 - L_1$  donne de meilleurs résultats même si elle nécessite plus d'itérations pour le faire.



### VIII.2.3 Conclusion

A la table VIII.2, les EQR sont listées pour les différents résultats présentés précédemment pour les différents termes de régularisation additifs avec ou sans contraintes de bornes.

Contraintes	Non régularisé	$L_2$	$L_2 L_1 / L_2 L_1 - L_1$
Sans	3.92	$1.53 \times 10^{-1}$	$9.59 \times 10^{-2}$
$\mathbf{x} \in [0, 1]^{N_e}$	3.10	$1.52 \times 10^{-1}$	$9.15 \times 10^{-2}$

TAB. VIII.2 – EQR des reconstructions pour différentes régularisations avec ou sans contraintes de bornes

Bien que les premiers tests effectués soient relativement simples, les conclusions suivantes peuvent être tirées. Comme cela était pressenti, la régularisation à l'aide du champ de Markov et du rappel à 0 est nécessaire afin d'obtenir des solutions physiquement acceptables. De même, l'emploi de la fonction de pénalisation  $L_2 L_1$ , pour le champ de Markov, représente mieux le caractère constant par morceaux du défaut que la fonction de pénalisation  $L_2$ . Il faut également remarquer qu'il y a une bonne résolution du défaut reconstruit dans le sens horizontal, au moins au niveau de la surface. Par contre, en profondeur, la largeur du défaut n'est pas nécessairement respectée.

Quelle que soit la pénalisation employée, l'EQR diminue lorsque les contraintes de bornes sont imposées. Cependant, l'effet est plus marquant sur les reconstructions que sur les valeurs d'EQR. Les contraintes de bornes sur l'objet testé  $\mathbf{x}$  améliorent donc les résultats et permettent d'éviter des valeurs de conductivité relative n'ayant pas de sens physique. En effet, lorsque la conductivité relative est supérieure à 1, ceci revient à avoir une conductivité négative, ce qui physiquement revient à avoir des courants de Foucault circulant à contre-sens. De même, une conductivité relative inférieure à 0 est équivalente à une conductivité supérieure à celle du milieu  $\sigma_0$ . Or ceci n'est pas possible physiquement si les dépôts de matière et la corrosion ne sont pas considérés et que seuls les manques de matière sont pris en compte.

## VIII.3 Modèle EF

Dans le chapitre IV un modèle par éléments finis est développé pour une utilisation dans un cadre d'inversion. Dans cette section, les résultats de reconstruction obtenus avec ce modèle direct sont présentés. Il est posé  $(\beta, \delta, \gamma) = (10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-2})$  pour les hyperparamètres après différents tests. Pour les méthodes EF-Basique et EF-CSI, on pose  $\lambda = 10^{12}$  déterminé par essais et erreurs pour les deux critères. Étonnamment, le coefficient de pondération sous-optimal obtenu est le même pour les deux méthodes alors que l'équation de couplage n'est pas la même. Il est possible qu'il s'agisse d'une coïncidence. Pour s'en assurer, il serait nécessaire d'utiliser d'autres maillages ou d'autres conditions d'acquisition. Cependant, ce n'est pas le propos de ce travail, c'est pourquoi on se limite à ce constat.

### VIII.3.1 Champ de Markov

L'emploi d'un modèle EF introduit d'importants changements par rapport au modèle DF, notamment au niveau de la discrétisation de l'espace. Généralement, les modèles DF utilisent une discrétisation cartésienne régulière alors que les méthodes éléments finis emploient généralement un maillage triangulaire. Le champ de Markov pénalise les variations  $D\mathbf{x}$  du défaut  $\mathbf{x}$ . La matrice  $D$  des différences premières approche le gradient de  $\mathbf{x}$ . Avec un maillage cartésien régulier, la matrice  $D$  est uniquement composée de 1 et de -1. Lorsque le maillage est triangulaire et irrégulier, il est légitime de se demander quelle forme doit prendre la matrice  $D$  : si elle doit prendre en compte la distance entre les centres des éléments ou si elle doit tout simplement effectuer la différence entre éléments connexes comme cela est proposé au chapitre V. On présente à la figure

VIII.6 deux reconstructions obtenues en utilisant les deux matrices de différences premières. Les meilleures reconstructions obtenues pour chaque matrice  $\mathbf{D}$  sont représentées. La matrice  $\mathbf{D}$  ne faisant pas intervenir les distances entre centres des éléments est appelée *régulière* (cf. équation (V.22)). A l'inverse, est appelée *irrégulière* (cf. équation (V.23)), la matrice qui prend en compte les dimensions des éléments du maillage.

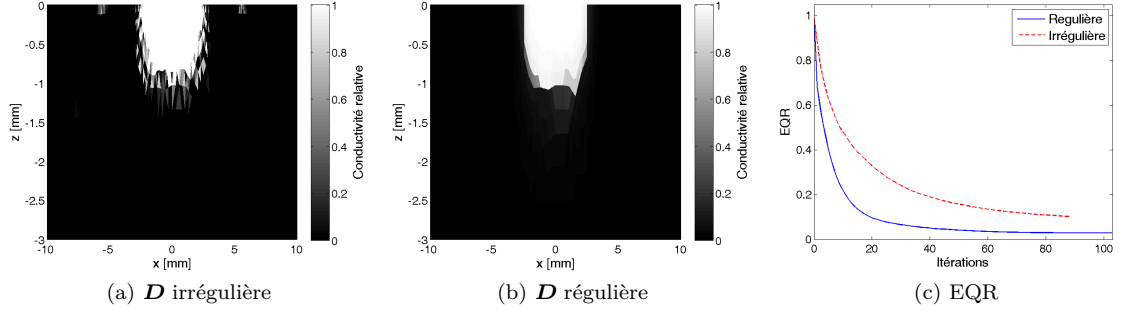


FIG. VIII.6 – Effet de la matrice  $\mathbf{D}$  sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

Il est visible sur cette figure que la matrice  $\mathbf{D}$  régulière est plus efficace en termes d'EQR en plus d'être plus simple à implémenter mais il semble que la minimisation nécessite plus d'itérations pour converger. Toutefois, il faut rester prudent concernant cette dernière conclusion. En effet, les nombres d'itérations nécessaires pour les deux matrices sont proches et il faudrait effectuer la comparaison pour d'autres défauts pour pouvoir s'assurer d'une plus forte lenteur de la matrice régulière. Cependant, ce n'est pas l'objet de cette étude, dans notre cas, la qualité de reconstruction est le paramètre le plus important. Par la suite, seule la matrice régulière est employée.

### VIII.3.2 Etude de la méthode XF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

**Régularisation** Compte tenu des résultats précédents, la matrice  $\mathbf{D}$  régulière est employée par la suite, la forme du champ de Markov est désormais fixée. Il s'agit donc d'étudier davantage la méthode proposée. On débute l'étude avec le défaut de 1 mm de profondeur utilisé précédemment avec le modèle DF. Les reconstructions pour la méthode EF-Basique sont présentées à la figure VIII.7.

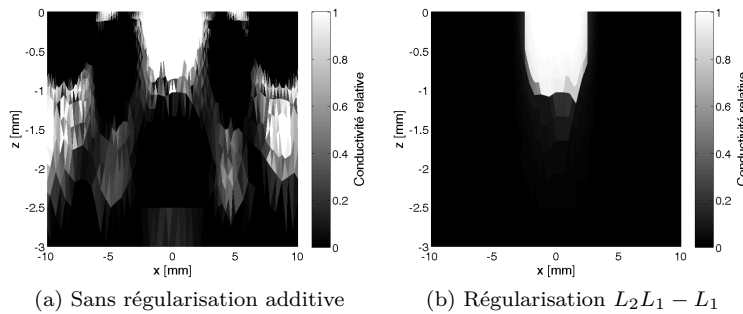


FIG. VIII.7 – Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

Il est visible, une fois de plus, que la régularisation est nécessaire pour obtenir des solutions physiquement admissibles. De plus, les défauts reconstruits sont très proches du défaut simulé.

Ceci montre la pertinence du choix de la fonction de pénalisation ainsi que des valeurs des hyperparamètres. Une rapide comparaison avec les résultats obtenus avec la DF-Basique peut laisser penser que la méthode EF-Basique est plus efficace. Il est cependant difficile de conclure à ce niveau, le maillage n'est pas le même mais il paraît clair que la possibilité de mailler finement autour du défaut permet d'améliorer la qualité de reconstruction. Afin de montrer la convergence de l'algorithme ainsi que l'efficacité de la méthode, l'EQR au cours des itérations est tracée à la figure VIII.8.

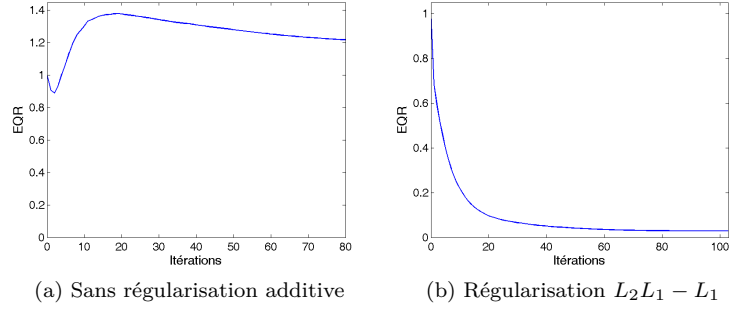


FIG. VIII.8 – EQR pour EF-Basique au cours des itérations pour le défaut de 1 mm de profondeur

On remarque sur cette figure que la régularisation est nécessaire pour obtenir des résultats exploitables et acceptables. En effet, dans le cas non régularisé, l'EQR est plus élevée à la convergence que la solution initiale. Dans le cas régularisé, l'EQR décroît strictement au cours des itérations. Afin de montrer le bon fonctionnement de la méthode, à la figure VIII.9 sont tracées :

1. les *données simulées* : les données obtenues par COMSOL ;
2. les *données finales* : les données simulées obtenues pour le défaut  $\mathbf{x}$  à la convergence ;
3. les *données apparentes* : les données obtenues avec l'équation d'observation pour le couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  à la convergence de l'algorithme.

Le critère détaillé est également tracé, en différenciant chaque terme du critère :

1. adéquation aux données :  $J_1(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  ;
2. erreur de couplage :  $\lambda J_2(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  ;
3. champ de Markov :  $\beta \psi(\mathbf{D}\mathbf{x}; \delta)$  ;
4. rappel à 0 :  $\gamma \|\mathbf{x}\|_1^2$ .

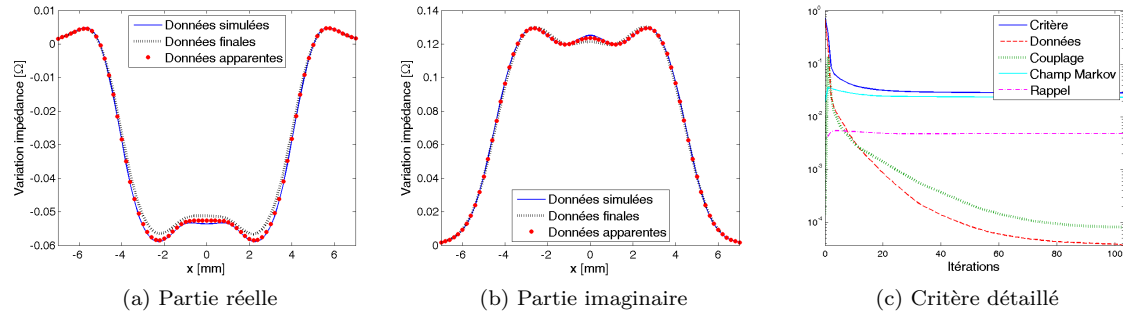


FIG. VIII.9 – Données (a) et (b) et critère (c) au cours des itérations pour la régularisation  $L_2L_1 - L_1$

Une bonne adéquation des données apparentes aux données simulées est visible sur cette figure. Ceci montre le bon fonctionnement de la méthode et un réglage suffisamment faible des paramètres

$(\beta, \gamma)$ . La qualité des reconstructions montre que les paramètres  $(\beta, \gamma)$  sont choisis suffisamment élevés. De plus, les données finales sont proches des données apparentes ce qui montre que  $\lambda$  est suffisamment élevé pour être efficace. Ainsi l'erreur sur l'équation de couplage n'est pas trop importante. Les données finales sont proches des données simulées illustrant l'efficacité de la méthode et du modèle direct.

**Initialisation** Le critère peut posséder des minima locaux. Afin d'étudier l'existence de ces minima à proximité de la solution à reconstruire, la méthode est testée avec une autre initialisation. L'initialisation est effectuée avec le défaut simulé  $\mathbf{x}^*$  à reconstruire. La solution obtenue en initialisant avec  $\mathbf{x}_0$  est appelée  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  la solution obtenue en initialisant avec  $\mathbf{x}^*$ . De même,  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont les champs électriques estimés à la fin des algorithmes initialisés respectivement par  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}^*$ . A la figure VIII.10, on présente les résultats de reconstruction pour la méthode EF-Basique avec ces deux initialisations.

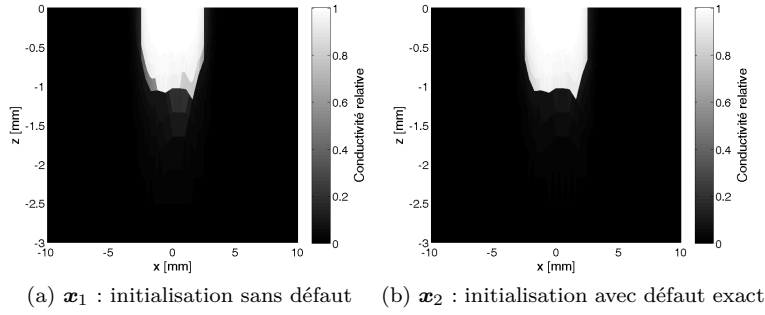


FIG. VIII.10 – Résultats de reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur pour 2 initialisations

On voit sur cette figure que les deux reconstructions obtenues sont très proches mais comportent quelques différences. En effet, il apparaît que l'initialisation avec le défaut exact est plus proche du défaut exact à la convergence. Afin de déterminer s'il s'agit de deux minima locaux, on trace le critère  $\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}_\nu, \mathbf{e}_\nu)$  en posant  $\mathbf{x}_\nu = \nu \mathbf{x}_1 + (1 - \nu) \mathbf{x}_2$ , de même  $\mathbf{e}_\nu = \nu \mathbf{e}_1 + (1 - \nu) \mathbf{e}_2$ . Les critères en question sont tracés à la figure VIII.11. Sur cette figure, on trace également la meilleure reconstruction obtenue au sens du critère  $\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  dans  $\text{Vect}\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{e}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{e}_2)\}$ .

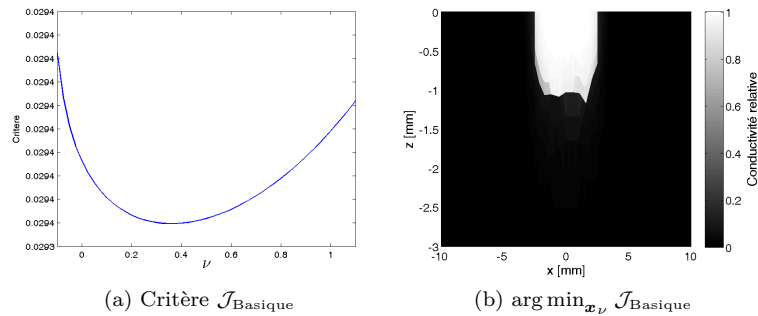


FIG. VIII.11 – Critère en fonction de  $\nu$

Les valeurs du critère varient très peu comme le montre cette figure. Il semblerait que le critère varie très peu autour du minimum, ce qui explique les difficultés pour obtenir le minimum du critère et que  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  soient légèrement différents. La différence entre  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  est liée à des

difficultés de convergence lors de la minimisation du critère  $\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  et non à l'existence de minima locaux. Il peut être nécessaire de minimiser  $\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  de manière plus efficace afin d'obtenir une solution plus proche du minimum. Des minima locaux peuvent exister mais semblent être évités grâce à :

- l'initialisation :  $\mathbf{x}^*$  et  $\mathbf{x}_0$  ne sont pas très éloignés ;
- les contraintes de bornes : l'espace dans lequel sont recherchées les solutions est restreint ce qui permet d'éviter des solutions non physiques.

### VIII.3.3 Etude pour différents défauts

On cherche à démontrer qu'il est possible d'exhiber un réglage robuste des paramètres de régularisation  $(\beta, \gamma, \delta)$  ainsi que du coefficient de pondération  $\lambda$ . Dans l'idéal, un tel réglage est efficace pour d'autres défauts. Le réglage proposé  $(\lambda, \beta, \gamma, \delta) = (10^{12}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-2})$  est testé sur d'autres défauts. L'étude débute avec un défaut de profondeur de 2 mm et de largeur 5 mm. Les reconstructions sont présentées à la figure VIII.12.

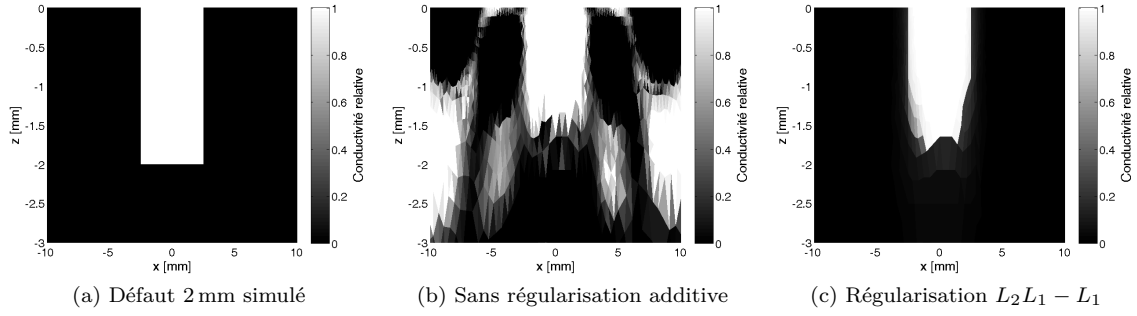


FIG. VIII.12 – Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur

Le réglage adopté reste efficace pour le défaut de 2 mm même si la méthode commence à montrer ses limites en profondeur. Cependant, ce défaut fait partie de ceux utilisés pour régler la méthode. Pour illustrer l'efficacité, la reconstruction est effectuée pour un défaut long avec 1 mm de profondeur et 8 mm de largeur. Ce défaut ne fait pas partie de l'ensemble utilisé pour régler les paramètres. Les résultats sont représentés à la figure VIII.13.

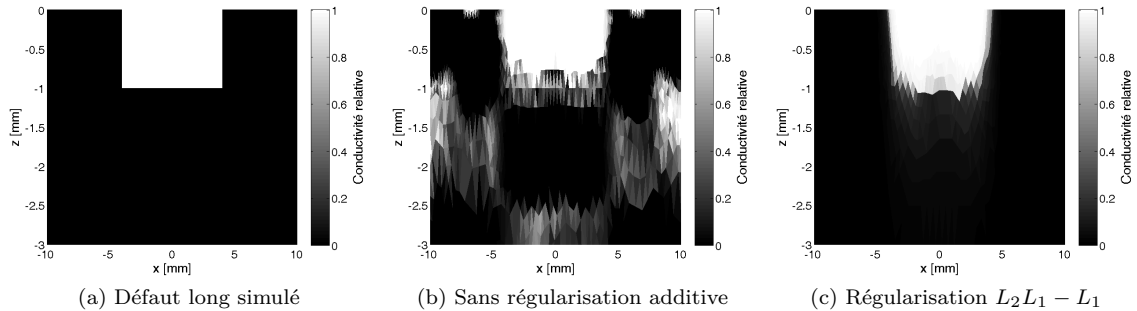


FIG. VIII.13 – Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut long

Compte tenu de la bonne adéquation du défaut reconstruit au défaut simulé avec le réglage choisi, ce dernier est également efficace pour ce défaut. Il est légitime de penser qu'il le soit également pour une grande classe de défauts. Afin de s'en assurer, la méthode est testée sur des

défauts plus ou moins profonds. La profondeur est le paramètre qui semble avoir le plus d'influence sur la qualité des reconstruction à cause de la nature surfacique des courants de Foucault. Les EQR obtenues pour les différents défauts testés sont résumées à la table VIII.3.

Défauts	1 mm	1, 5 mm	2 mm	2, 5 mm	Long
EQR	$2.91 \times 10^{-2}$	$4.54 \times 10^{-2}$	$4.97 \times 10^{-2}$	$5.29 \times 10^{-2}$	$4.03 \times 10^{-2}$
Profondeur	1, 04 mm	1, 44 mm	1, 66 mm	2, 06 mm	1, 04 mm
Nb. itérations CSI	104	252	324	492	118
Temps [s]	$3, 64 \times 10^3$	$6, 74 \times 10^3$	$5, 18 \times 10^3$	$6, 66 \times 10^3$	$4, 51 \times 10^3$

TAB. VIII.3 – EQR, profondeur, nombre d'itérations CSI et temps de calcul pour différents défauts avec la méthode EF-Basique avec le réglage  $(\lambda, \beta, \delta, \gamma) = (10^{12}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-2})$

On observe sur cette table que les EQR augmentent avec la profondeur du défaut. Plus le défaut est profond, moins les données sont sensibles à la profondeur du défaut et plus il est difficile de reconstruire le défaut. La difficulté se manifeste par une dégradation de l'EQR en fonction de la profondeur mais également par une augmentation du nombre d'itérations CSI. En effet, sur ce dernier point, un regard sur les solutions au fur et à mesure des itérations montre que le défaut se diffuse. Dès lors, plus un défaut est grand et plus la diffusion nécessite d'itérations pour s'effectuer. Par contre, cette augmentation du nombre d'itérations ne se traduit pas nécessairement par une augmentation du temps de calcul nécessaire.

### VIII.3.4 Etude des méthodes XF-Basique et XF-CSI avec ou sans réglage heuristique de $\lambda$

#### VIII.3.4.a Défaut de 1 mm

Dans les sections précédentes, on a notamment illustré l'efficacité de la méthode XF-Basique. Au chapitre V, deux critères sont proposés : les critères XF-Basique et XF-CSI. Dans cette section, ces différentes méthodes sont comparées en termes de résultats de reconstruction. Compte tenu du réglage automatique de  $\lambda$  très présent dans la littérature pour les méthodes de type MGM/CSI, une adaptation du calcul automatique de  $\lambda$  est proposée au chapitre V pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI. Ces heuristiques sont également testées dans ce chapitre. Il est donc proposé de comparer les quatre méthodes (EF-Basique/EF-CSI avec choix automatique/manuel de  $\lambda$ ) avec les données simulées à disposition. Les reconstructions pour les méthodes EF-Basique/EF-CSI avec  $\lambda$  réglé de manière automatique ou manuelle pour le défaut de 1 mm sont montrées à la figure VIII.14.

Il apparaît sur cette figure que les résultats de reconstruction sont très proches les uns des autres. Bien que le réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$  puisse fournir des solutions dégénérées en tomographie par micro-ondes (Barrière et al., 2009), ce n'est pas le cas pour notre méthode. L'utilisation des contraintes de bornes, le rappel à 0 et la petite zone d'intérêt semblent permettre d'éviter les valeurs physiquement aberrantes et les solutions dégénérées.

On cherche à comparer les méthodes proposées en termes d'EQR et de « critère primal »  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  de l'équation (V.21). L'EQR et le critère primal pour les quatre méthodes au cours des itérations sont tracés à la figure VIII.15.

Il est visible sur cette figure que l'EQR et le critère primal pour les quatre méthodes diminuent au cours de la minimisation. Cependant, sur cette figure, la méthode EF-Basique semble plus efficace car les solutions obtenues à la convergence ont des valeurs d'EQR et de critère primal plus faibles. De plus, elle nécessite moins de temps de calcul pour obtenir une meilleure solution.

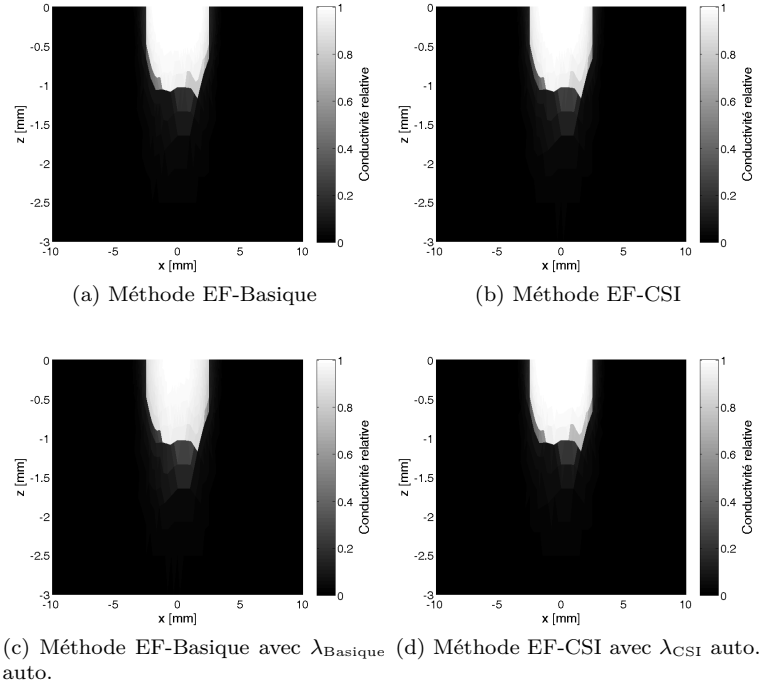


FIG. VIII.14 – Comparaison des résultats de reconstruction entre les méthodes pour le défaut de 1 mm de profondeur

#### VIII.3.4.b Défaut de 2 mm

Afin de pouvoir étudier davantage ces méthodes et ainsi tirer des conclusions plus consistantes, celles-ci sont testées avec le défaut de 2 mm de profondeur. Les résultats de reconstruction pour le défaut de 2 mm sont tracés à la figure VIII.16.

Les limites de ces méthodes en termes de qualité de reconstruction apparaissent sur cette figure. En effet, le défaut reconstruit n'atteint pas la profondeur de 2 mm qui correspond à la profondeur du défaut simulé. Les méthodes EF-Basique et EF-CSI ont des résultats très proches. Le réglage automatique de  $\lambda$  pour EF-CSI semble permettre de reconstruire plus profondément. A l'inverse, le réglage automatique dans le cas de  $\lambda$  pour EF-Basique donne des résultats plus mauvais que ceux obtenus avec réglage manuel. On trace à la figure VIII.17, l'évolution de l'EQR et du critère primal au cours des itérations.

On voit sur cette figure que la méthode EF-Basique est toujours la méthode la plus efficace à temps de calcul équivalent, même si, pour ce défaut, la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique donne de meilleurs résultats de reconstruction et un critère primal plus faible à la fin de la minimisation.

#### VIII.3.4.c Etude du réglage automatique de $\lambda$

D'après les résultats précédents, la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique donne de bons résultats alors que la méthode EF-Basique avec  $\lambda_{\text{Basique}}$  automatique procure de mauvais résultats. On cherche à expliquer les différences de résultats entre ces deux réglages. L'évolution de  $\lambda_{\text{CSI}}$  au cours des itérations est tracée à la figure VIII.18,

La variation de  $\lambda_{\text{CSI}}$  présentée à la figure VIII.18 montre que la valeur de  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique est très élevée au commencement de la reconstruction, elle est de l'ordre de  $10^{13}$ . Il est montré plus loin, que des problèmes de conditionnement se posent lorsque  $\lambda$  est trop élevé mais donne de meilleurs résultats de reconstruction. Cette figure montre que  $\lambda_{\text{CSI}}$  est strictement supérieur à

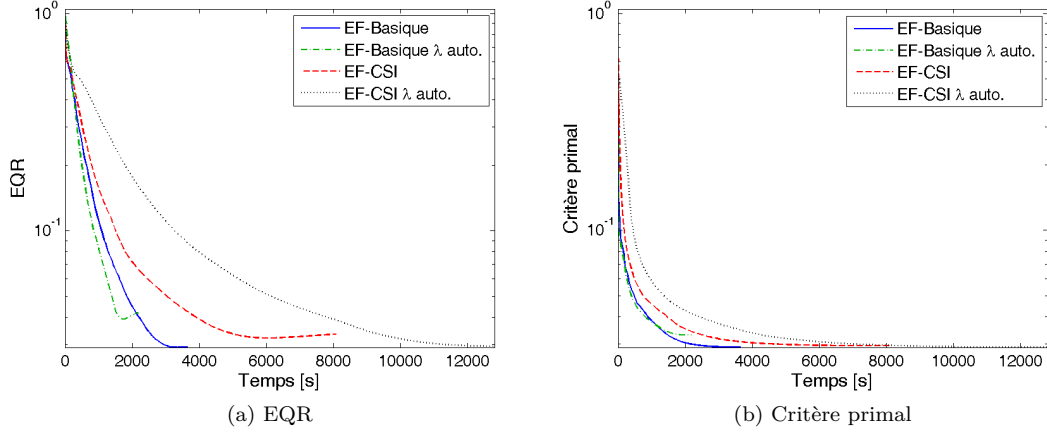


FIG. VIII.15 – Comparaison des EQR et du critère primal entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 1 mm de profondeur

$\lambda = 10^{12}$ . Cette dernière valeur est choisie manuellement pour les méthodes EF-Basique et EF-CSI lorsque  $\lambda$  est fixé et constant tout au long de la minimisation.  $\lambda$  est choisi de façon à présenter un compromis intéressant entre temps de calcul et qualité de reconstruction. A l'inverse, avec le calcul automatique,  $\lambda_{\text{Basique}}$  est de l'ordre de  $10^{11}$ . Cet ordre de grandeur est trop faible pour que la solution ait un sens surtout pour des défauts profonds. La valeur de  $\lambda$  est trop faible pour des défauts profonds, c'est pourquoi elle n'est pas très efficace pour le défaut de 2 mm alors que dans le cas du défaut de 1 mm elle semble être efficace. Ce choix de  $\lambda_{\text{Basique}}$  est donc à proscrire par la suite.

Il peut également être remarqué que  $\lambda_{\text{CSI}}$  décroît strictement au cours des itérations, ce qui revient à relâcher la contrainte de couplage au cours de la reconstruction. Cette relaxation est contraire à ce qu'il est logique de faire. En effet, il est plus judicieux de relâcher la contrainte au début de la reconstruction puis de contraindre au fur et à mesure l'équation de couplage. Lorsque  $\lambda$  est élevé le conditionnement se dégrade, c'est pourquoi il est plus intéressant d'augmenter  $\lambda$  au cours des itérations et non de faire l'inverse.

Il apparaît également que  $\lambda_{\text{CSI}}$  (cf. équation (V.14)) pour le défaut de 2 mm est toutefois supérieur à celui du défaut de 1 mm, ce qui est logique car l'énergie des données est plus élevée pour le cas de 2 mm. Ceci signifie que le  $\lambda_{\text{CSI}}$  est plus élevé au démarrage lorsque le défaut est plus profond ce qui est cohérent avec les observations effectuées à la figure VIII.18. En effet, étant donné que le maillage est identique quel que soit le défaut et que le champ incident est indépendant du défaut, le terme  $\sum_{\ell} \|\mathbf{C}_x^m \mathbf{e}_{0\ell}\|^2$  est toujours le même à l'initialisation pour des défauts de même largeur. Par contre, le terme  $\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2$  dépend du défaut à reconstruire et augmente avec la profondeur à largeur constante. Ainsi, plus le défaut est profond et plus  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique est élevé au démarrage et plus les problèmes de conditionnement sont forts. Toutefois, choisir un  $\lambda$  plus élevé lorsque le défaut est plus profond est judicieux comme cela est montré plus loin dans ce chapitre.

Comme cela a été constaté précédemment, les reconstructions par la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique sont meilleures. Il faut se demander si cela ne provient pas uniquement de la valeur de  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique qui est toujours plus élevée que la valeur de  $\lambda = 10^{12}$  fixée manuellement au début du problème. Les méthodes EF-CSI et EF-Basique sont donc testées sur le défaut 2 mm avec le même  $\lambda_{\text{CSI}}$  que celui obtenu à l'arrêt de la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique. A la fin de la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique,  $\lambda$  vaut  $3,8 \times 10^{12}$ . Les résultats de reconstruction sont affichés à la figure VIII.19.

Il apparaît sur cette figure que les défauts de reconstruction sont très proches visuellement. Les EQR et les profondeurs estimées sont listées à la table VIII.4 pour différents défauts.



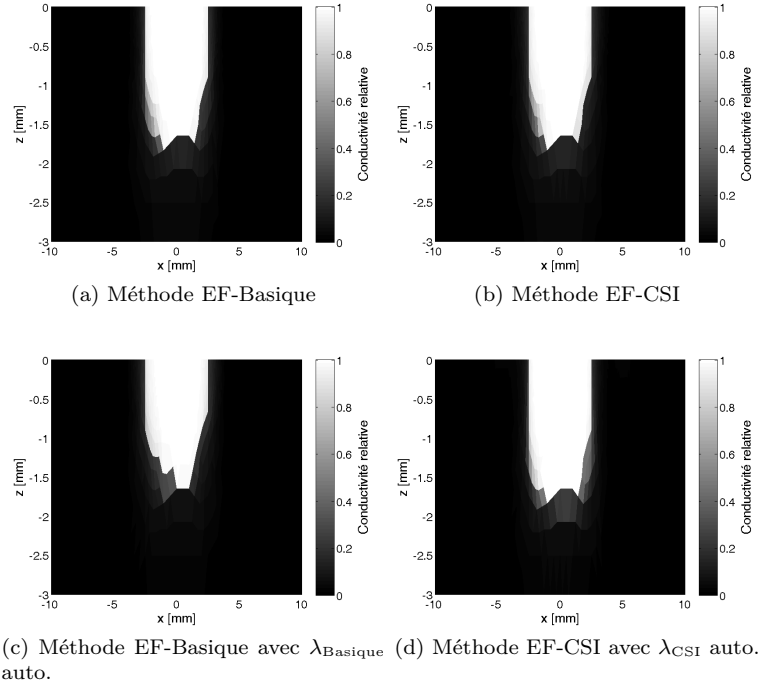


FIG. VIII.16 – Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur

Méthode	EF-Basique	EF-CSI	EF-CSI avec $\lambda_{\text{CSI}}$ auto.
EQR	$3,28 \times 10^{-2}$	$3,70 \times 10^{-2}$	$3,67 \times 10^{-2}$
Profondeur	1,66 mm	1,66 mm	1,66 mm
Temps [s]	$1,7 \times 10^4$	$8,9 \times 10^4$	$6,3 \times 10^4$

 TAB. VIII.4 – EQR, profondeur et temps de calcul pour les différentes méthodes pour le défaut 2 mm avec  $\lambda_{\text{CSI}} = 3,8 \times 10^{12}$ 

Il apparaît sur cette table que les EQR pour les méthodes EF-CSI avec et sans réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$ . A l'inverse, l'EQR de la méthode EF-Basique est plus faible. Cependant, le critère XF-Basique n'est pas équivalent au critère XF-CSI. Il peut donc être conclu que la différence en termes de qualité constatée auparavant pour les deux choix possibles de  $\lambda_{\text{CSI}}$  n'est rien d'autre qu'une question de réglage de  $\lambda$ . Il peut être également remarqué que les EQR sont assez différentes entre EF-CSI et EF-Basique sans qu'il n'y ait de fortes différences visuelles entre les solutions. Enfin, le temps de calcul de EF-Basique est bien inférieur à celui de EF-CSI avec ou sans réglage automatique. Ce dernier point confirme les estimations de coût par itérations effectuées au chapitre VI.

#### VIII.3.4.d Nombre d'itérations GC

On cherche à étudier le conditionnement des critères minimisés et le coût de calcul. C'est pourquoi, le nombre d'itérations de GC nécessaires pour la minimisation du critère par rapport à  $e/w$  à chaque itération des algorithmes de minimisation CSI pour les défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur sont tracés à la figure VIII.20. Le nombre d'itérations GC est un indicateur du conditionnement car, plus il faut d'itérations pour la minimisation et plus le conditionnement

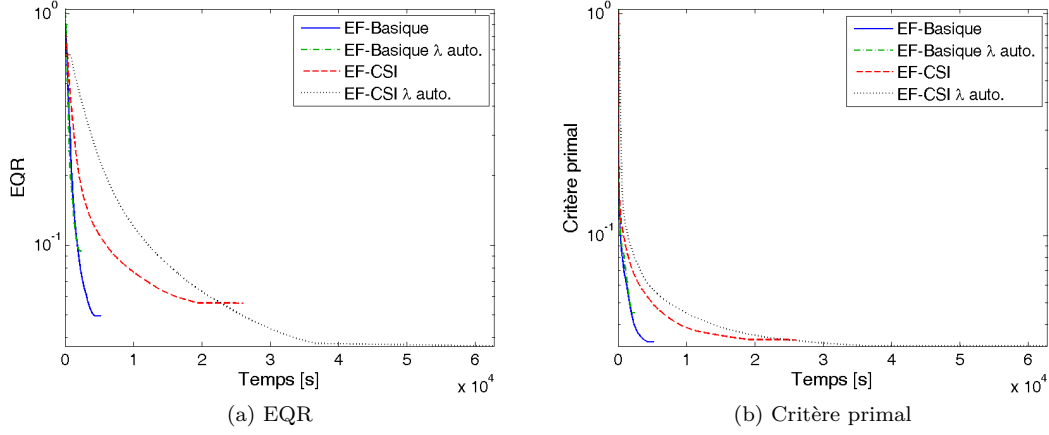


FIG. VIII.17 – Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur

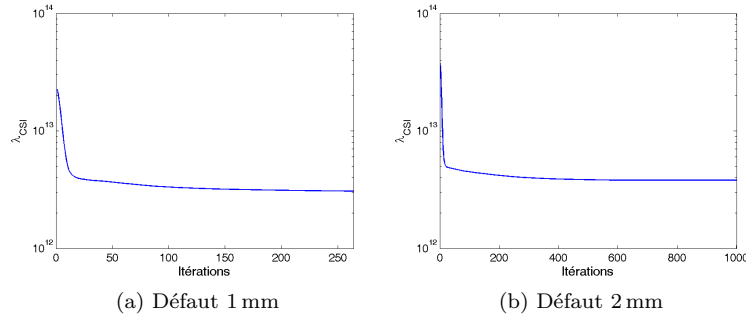


FIG. VIII.18 – Evolution de  $\lambda_{\text{CSI}}$  au cours des itérations pour les défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur

est mauvais. De même, la minimisation par rapport à  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$  est l'étape la plus coûteuse durant la minimisation. La minimisation par rapport à  $\mathbf{x}$  est négligeable en termes de temps de calcul. C'est pourquoi, le nombre d'itérations GC est également un indicateur du coût de chaque itération CSI.

Le nombre d'itérations CSI est plus faible que dans le cas des méthodes EF-Basique. Cependant, ce n'est pas suffisant pour en conclure que ces méthodes coûtent moins cher. Le nombre total d'itérations de GC permet d'avoir une idée du coût calculatoire total nécessaire pour résoudre le problème. On voit sur cette figure que la méthode EF-Basique nécessite beaucoup plus d'évaluations de gradient à chaque itération CSI que la méthode EF-CSI avec ou sans réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$ . Cependant, il faut garder à l'esprit que chaque évaluation du gradient avec la méthode EF-Basique est beaucoup moins coûteuse. En effet, elle ne fait intervenir que des multiplications matricielles de matrices creuses alors que la méthode EF-CSI nécessite l'inversion de systèmes à chaque évaluation.

On peut penser que la différence de nombre d'itérations de GC nécessaires entre les deux méthodes provient d'un meilleur conditionnement de l'équation de couplage utilisée. En effet, pour obtenir le critère XF-CSI, on multiplie à gauche l'équation de couplage initiale par la matrice  $\mathbf{A}_0^{-1}$ . Cette multiplication est équivalente à un préconditionnement. Ceci peut expliquer pourquoi la minimisation du critère CSI par rapport à  $\mathbf{w}$  nécessite moins d'itérations GC que la minimisation du critère Basique par rapport à  $\mathbf{e}$ . Par contre, on voit qu'améliorer le conditionnement des sys-

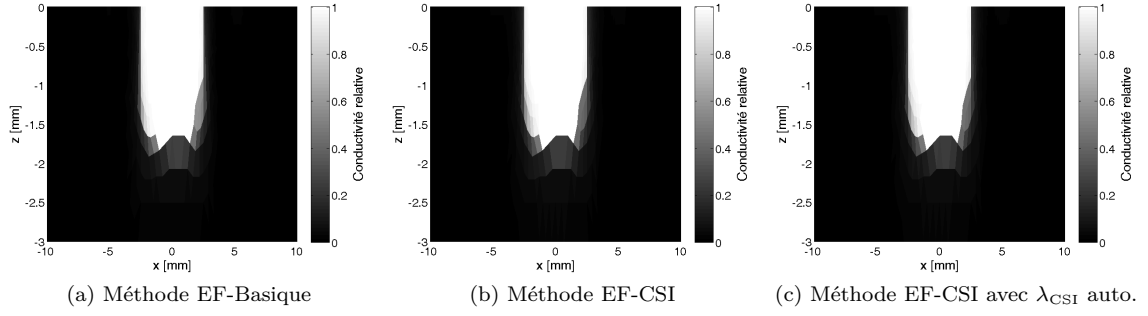
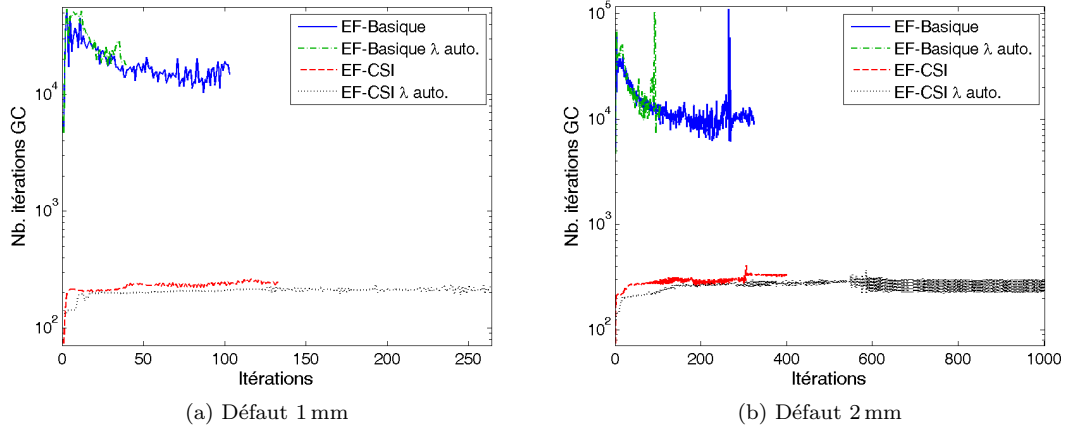

 FIG. VIII.19 – Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur avec le même  $\lambda_{\text{CSI}}$  final


FIG. VIII.20 – Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour les défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur en termes de nombre d'itérations

tèmes linéaires par rapport à  $\mathbf{w}$  à résoudre n'améliore pas le conditionnement du problème global puisqu'il faut davantage d'itérations CSI à la méthode XF-CSI pour converger que la méthode XF-Basique.

#### VIII.3.4.e Synthèse

Afin d'afficher certaines tendances et tirer des conclusions plus fermes, les méthodes sont comparées sur différents défauts. A la table VIII.5, les EQR des reconstructions pour les différentes méthodes pour plusieurs défauts sont comparées.

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
Basique	$2,91 \times 10^{-2}$	$4,54 \times 10^{-2}$	$4,95 \times 10^{-2}$	$5,29 \times 10^{-2}$	$4,03 \times 10^{-2}$
Basique $\lambda$ auto.	$4,18 \times 10^{-2}$	$6,29 \times 10^{-2}$	$9,45 \times 10^{-2}$	$1,15 \times 10^{-1}$	$6,22 \times 10^{-2}$
CSI	$3,34 \times 10^{-2}$	$5,15 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$	$6,44 \times 10^{-2}$	$5,05 \times 10^{-2}$
CSI $\lambda$ auto.	$2,94 \times 10^{-2}$	$3,95 \times 10^{-2}$	$3,67 \times 10^{-2}$	$4,62 \times 10^{-2}$	$3,58 \times 10^{-2}$

TAB. VIII.5 – EQR pour les différentes méthodes et les différents défauts

Les méthodes proposées sont très efficaces, même si en profondeur il est plus difficile d'être précis. Quelle que soit la méthode employée, l'EQR augmente avec la profondeur du défaut. Ceci correspond à ce qui était attendu : plus le défaut est profond et moins les données sont sensibles et plus il est difficile d'être précis. Il peut tout de même être remarqué une très bonne résolution du défaut reconstruit dans le sens horizontal en surface. En effet, la largeur du défaut ne semble pas être difficile à estimer.

A la table VIII.6, le temps de calcul nécessaire pour atteindre la convergence lors de la minimisation du critère est listé pour chaque méthode et pour différents défauts.

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
Basique	$3,64 \times 10^3$	$6,74 \times 10^3$	$5,18 \times 10^3$	$6,66 \times 10^3$	$4,51 \times 10^3$
Basique $\lambda$ auto.	$2,18 \times 10^3$	$3,74 \times 10^3$	$2,45 \times 10^3$	$4,57 \times 10^3$	$3,49 \times 10^3$
CSI	$8,06 \times 10^3$	$2,30 \times 10^4$	$2,60 \times 10^4$	$3,98 \times 10^4$	$1,05 \times 10^4$
CSI $\lambda$ auto.	$1,28 \times 10^4$	$4,38 \times 10^4$	$6,28 \times 10^4$	$5,27 \times 10^4$	$1,79 \times 10^4$

TAB. VIII.6 – Temps de calcul en [s] nécessaire pour les différentes méthodes et les différents défauts

Il apparaît sur cette dernière table que la minimisation du critère EF-CSI est systématiquement plus longue que celle du critère EF-Basique que la valeur de  $\lambda$  soit fixée ou non. En 2D et pour le maillage adopté, le critère EF-CSI est plus coûteux à minimiser. Il est difficile *a priori* de savoir si ce coût plus élevé pour d'autres maillages et pour un cas 3D. Il apparaît également que la minimisation du critère EF-CSI le réglage automatique de  $\lambda$  nécessite plus de temps de calcul que la minimisation pour ce même critère à  $\lambda$  fixé. Ceci provient de la valeur de  $\lambda$  qui est beaucoup plus élevée. Dans le cas du critère EF-Basique, c'est exactement le contraire qui se produit, le réglage automatique de  $\lambda$  emploie des valeurs très faibles.

Etant donné que les méthodes développées présentent des difficultés pour reconstruire des défauts en profondeur, on cherche à illustrer et à identifier les limites de ces méthodes. Différents défauts de même largeur mais de profondeurs différentes sont reconstruits. A l'aide de la méthode proposée au chapitre VII, la profondeur de chaque défaut reconstruit est estimée. Avec ces profondeurs, un diagramme profondeur estimée en fonction de la profondeur réelle est tracé à la figure VIII.21 pour chaque méthode. De plus, un diagramme représentant le temps de calcul en fonction de la profondeur du défaut à reconstruire est également présenté.

Il apparaît sur ces figures que le réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$  permet d'avoir des meilleures reconstructions pour la méthode EF-CSI car les défauts sont bien reconstruits en profondeur. Contrairement, à la méthode EF-Basique, il est donc possible d'avoir un réglage automatique de  $\lambda$  tout en obtenant des résultats corrects. Il faut garder à l'esprit que cette méthode reconstruit mieux les défauts profonds uniquement parce qu'elle choisit une valeur de  $\lambda$  plus élevée, comme le montre une étude présentée précédemment. Par contre, ce gain en efficacité coûte cher en temps de calcul.

Les méthodes EF-Basique et EF-CSI sont très efficaces pourvu que  $\lambda$  soit fixé suffisamment élevé. Il faut noter que si la différence en termes d'EQR paraît importante sur la table VIII.5, cette différence l'est beaucoup moins en termes de profondeur estimée. Sans réglage automatique, la méthode EF-Basique est plus efficace que la méthode EF-CSI en termes d'EQR pour un coût de calcul plus faible. Par contre la méthode EF-Basique sans réglage automatique est légèrement moins efficace que la méthode EF-CSI avec réglage automatique, cependant son coût de calcul est beaucoup plus faible. La méthode EF-Basique semble présenter un bon compromis efficacité/coût de calcul même s'il est nécessaire de calibrer  $\lambda_{\text{Basique}}$ .

A l'inverse, la méthode EF-Basique avec le réglage automatique de  $\lambda$  donne les plus mauvais résultats. Or la seule différence avec la méthode EF-Basique est le choix de  $\lambda_{\text{Basique}}$ . La valeur de  $\lambda_{\text{Basique}}$  est de l'ordre de  $10^{11}$  avec le calcul automatique, cette valeur est trop faible pour obtenir

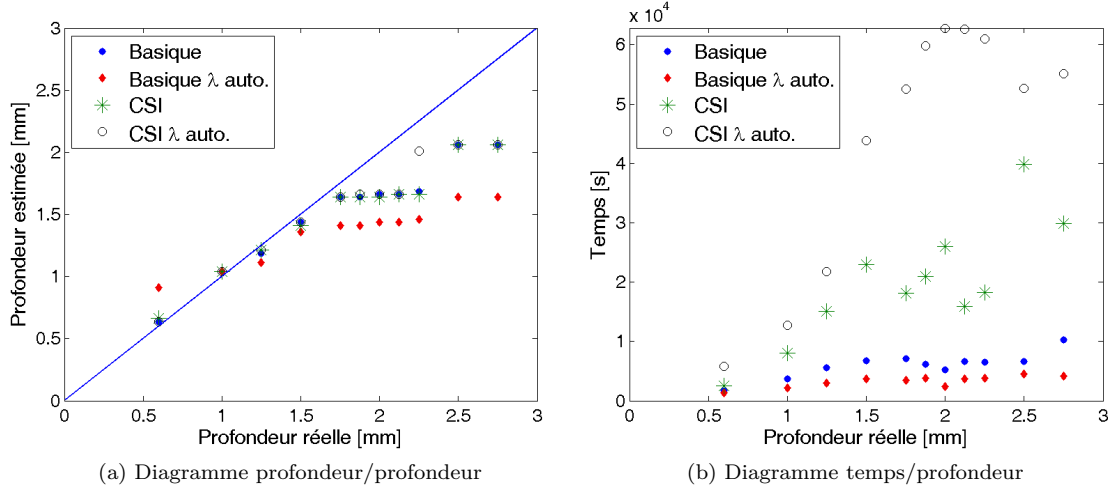


FIG. VIII.21 – Diagrammes de la profondeur estimée (a) et du temps (b) en fonction de la profondeur du défaut à estimer pour les méthodes EF-Basique et EF-CSI avec ou sans réglage automatique de  $\lambda$

des reconstructions fiables par rapport à la valeur fixée manuellement  $\lambda = 10^{12}$ . C'est pourquoi, l'estimation automatique de  $\lambda_{\text{Basique}}$  n'est plus effectuée dans la suite de ce manuscrit.

### VIII.3.5 Impact de $\lambda$ sur les reconstructions

Au chapitre VI, une méthode de minimisation sous contraintes de couplage est proposée car il est montré que les reconstructions sont de meilleure qualité lorsque  $\lambda$  augmente. Les résultats de reconstructions obtenues pour différentes valeurs de  $\lambda \in \{10^{10}, 10^{12}, 10^{14}, 10^{16}, 10^{18}, 10^{20}\}$  avec la méthode EF-Basique sont illustrés à la figure VIII.22.

Ces courbes confirment de manière plus spectaculaire l'impact de  $\lambda$  sur la qualité de reconstruction. Lorsque  $\lambda$  est trop faible, le défaut est mal reconstruit, notamment en profondeur. L'équation de couplage n'est pas respectée et la solution n'a pas de sens. A l'inverse, il existe une valeur de  $\lambda$  à partir de laquelle les différences entre les reconstructions sont très faibles. En effet, l'impact de  $\lambda$  est minime à partir de  $10^{16}$ . On explique ici comment sont obtenues ces courbes. Minimiser directement le critère EF-Basique pour des valeurs de  $\lambda \geq 10^{13}$  est très inefficace. C'est pourquoi, le critère EF-Basique est minimisé en augmentant  $\log\{\lambda\}$  par paliers de 0.25.  $\lambda$  est augmenté lorsque la convergence est atteinte pour la valeur courante de  $\lambda$ , permettant ainsi de retarder les problèmes de conditionnement et d'avoir une initialisation très proche de la solution à la convergence. L'EQR, l'erreur de couplage ainsi que le nombre d'itérations en fonction de  $\lambda$  sont tracées à la figure VIII.23.

Il est apparaît que l'EQR diminue avec  $\lambda$ . De plus, l'erreur de couplage diminue également lorsque  $\lambda$  augmente. Le nombre d'itérations nécessaires pour converger augmente très fortement à partir de  $10^{12}$ , illustrant ainsi les problèmes de conditionnement qui se posent lorsque  $\lambda$  augmente. C'est à partir de cette valeur que l'EQR semble arriver à saturation. De plus, le nombre d'itérations indiqués est le nombre d'itérations total en utilisant la minimisation CSI du critère XF-Basique avec  $\lambda$  qui augmente par palier. Dès que  $\lambda \geq 10^{13}$  il est nécessaire de procéder à plus de 2000 itérations CSI. C'est une limite importante de la méthode, pour obtenir une bonne solution il faut que  $\lambda$  soit très élevé, mais il faut beaucoup de temps pour y arriver. Il semble donc qu'il existe une valeur  $\lambda_{\min}$ , au-dessus de laquelle les reconstructions ne varient plus, ici  $\lambda_{\min} = 10^{16}$ . A l'inverse, il existe une valeur  $\lambda_{\max}$ , au-dessous de laquelle il est très difficile d'obtenir une solution, ici  $\lambda_{\max} = 10^{12}$ . Dans un cas favorable,  $\lambda_{\min} \geq \lambda_{\max}$ . Dans un cas idéal,  $\lambda_{\min} \gg \lambda_{\max}$ . Malheureusement, ce n'est pas notre cas.

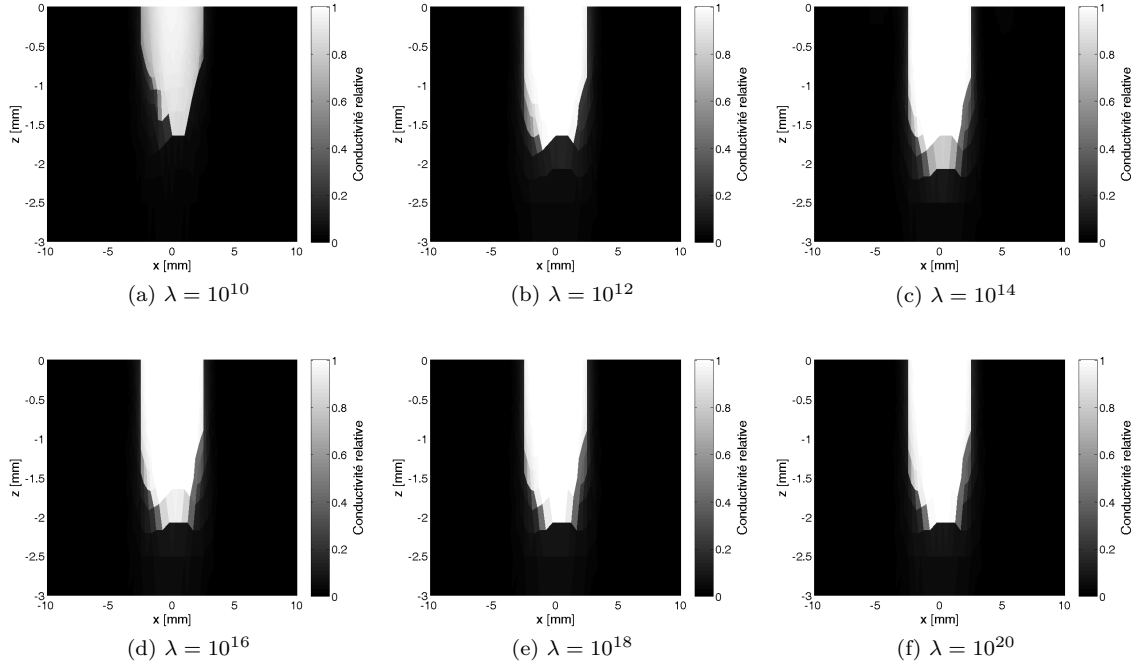


FIG. VIII.22 – Impact du paramètre  $\lambda$  sur la qualité de reconstruction pour la méthode EF-Basique dans le cas du défaut de 2 mm de profondeur

## VIII.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le critère DF-Basique a été testé afin d'étudier l'impact de la régularisation et des contraintes de bornes sur les reconstructions. Il a été montré que la régularisation  $L_2L_1 - L_1$  pour le champ de Markov ainsi que le terme de rappel à 0 sont tout à fait adaptés pour représenter les défauts à reconstruire. On a également montré que les contraintes de bornes permettent de stabiliser le problème et d'obtenir des solutions physiquement plus admissibles.

La méthode XF-Basique adaptée aux différents modèles développés a été testée. Cette méthode se montre efficace lorsque la régularisation est adaptée aux caractéristiques du défaut. On a montré qu'il était possible d'adapter efficacement les méthodes de type MGM/CSI à des modèles

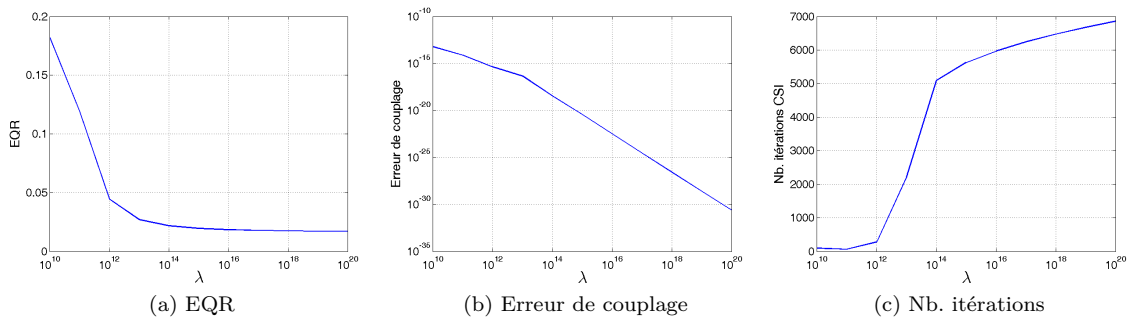


FIG. VIII.23 – Impact de  $\lambda$  sur la qualité de reconstruction et la vitesse de convergence pour la méthode EF-Basique

différentiels et notamment EF. En effet, l'adaptation des méthodes de type CSI à des modèles DF avait déjà été effectuée dans la littérature (Gilmore et al., 2009) mais pas à un modèle EF. Il a été également illustré qu'il n'était pas nécessaire de passer à une formulation en sources de contraste ni en forme de champs des équations d'observation et de couplage pour obtenir une méthode de reconstruction efficace à l'aide de la méthode XF-Basique. Ceci montre que la généralisation des méthodes de type MGM/CSI proposée au chapitre I fonctionne correctement. Le modèle EF semble donner des résultats plus précis que le modèle DF, ceci peut être dû au maillage triangulaire irrégulier qui permet de mailler finement dans la zone d'intérêt et grossièrement en dehors. Toutefois, la présente étude ne permet pas de déterminer si les modèles EF sont ou ne sont pas, plus efficaces que les modèles DF dans un cadre d'inversion. Ce n'est pas le propos de ce travail.

On a montré qu'il était possible d'exhiber un réglage de paramètres sous-optimal qui permette de reconstruire efficacement de nombreux défauts, notamment les défauts profonds. En effet, la robustesse de la méthode au réglage des paramètres conditionne son applicabilité *in situ*.

Il a été montré que la méthode EF-CSI avec réglage automatique était un peu plus efficace que la méthode EF-Basique sans réglage automatique. Cependant, il a été montré que la méthode EF-Basique pouvait être plus efficace pour un temps de calcul moindre que la méthode EF-CSI en choisissant une valeur de  $\lambda$  plus forte. Il apparaît donc que le critère EF-Basique est plus facile à minimiser que le critère EF-CSI puisqu'il nécessite moins d'itérations CSI et moins de temps de calcul pour des résultats très proches.

Les critères XF-Basique et XF-CSI sont différents, cependant des solutions très proches peuvent être trouvées. Il se peut que la différence entre les solutions soit due au réglage de  $\lambda$ . Les méthodes de types MGM/CSI dans leur forme classique emploient une heuristique pour choisir une valeur de  $\lambda$ . Dans ce chapitre, les heuristiques utilisées pour  $\lambda_{\text{Basique}}$  et  $\lambda_{\text{CSI}}$  sont directement inspirées de ces méthodes. La méthode CSI a supplanté la méthode MGM après qu'elles aient été comparées sur un seul problème. Les valeurs de  $\lambda$  n'ont jamais été étudiées dans la littérature pour ces méthodes. Il se peut que la différence de résultats entre la méthode MGM et la méthode CSI, provienne uniquement d'un choix de  $\lambda$  trop faible dans le cas de la méthode MGM à cause de l'heuristique employée et non d'une différence de critère. Si tel est le cas, il pourrait être envisagé d'employer le calcul de  $\lambda_{\text{CSI}}$  aux méthodes MGM ou Basique.

Quelle que soit la méthode, on remarque qu'il est plus difficile de reconstruire les défauts en profondeur. Au-delà de 1.5 mm, les méthodes montrent quelques signes de faiblesse. Pour les cas difficiles,  $\lambda$  doit être choisi plus élevé. Contraindre l'équation de couplage peut améliorer les résultats de reconstruction. Cependant, augmenter la valeur de  $\lambda$  n'est pas nécessairement une bonne solution puisque le nombre d'itérations nécessaires pour converger augmente très fortement avec  $\lambda$ .

## Chapitre IX

# Reconstructions par méthodes sous contraintes de couplage

### Sommaire

---

IX.1	Introduction du Lagrangien augmenté . . . . .	<b>122</b>
IX.1.1	Résultats . . . . .	122
IX.1.2	Initialisation . . . . .	123
IX.2	Comparaisons entre EF-Basique et EF-AL-Basique . . . . .	<b>124</b>
IX.2.1	Défaut de 2 mm . . . . .	124
IX.2.2	Autres défauts . . . . .	126
IX.3	Introduction des sources de contraste . . . . .	<b>127</b>
IX.3.1	Résultats . . . . .	127
IX.3.2	Initialisation . . . . .	129
IX.3.3	Comparaison avec les autres méthodes . . . . .	129
IX.4	Conclusion . . . . .	<b>132</b>

---

Dans le chapitre VIII, les résultats de reconstruction pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI ont été présentés. Il est apparu de manière très claire que le réglage de  $\lambda$  a un fort impact sur les résultats notamment pour les défauts profonds. Ces défauts sont plus difficiles à reconstruire car les données sont moins informatives en profondeur. Plus  $\lambda$  est élevé et meilleurs sont les résultats. Il apparaît donc que contraindre l'équation de couplage améliore significativement les résultats. Pour la minimisation du critère primal, les méthodes de descente sont classiques en tomographie de diffraction. Ces méthodes sont extrêmement coûteuses à cause de la résolution. Afin d'éviter ces difficultés, on propose au chapitre VI d'utiliser une méthode de type Lagrangien augmenté. Cet algorithme permet de résoudre le problème en contraignant l'équation de couplage, ce qui a également l'avantage de régler automatiquement le coefficient de pondération  $\lambda$ .

Dans ce chapitre, on présente une étude d'impact de l'emploi du Lagrangien augmenté sur les résultats de reconstruction, sur le nombre d'itérations nécessaires et sur le temps de calcul avec le défaut de profondeur de 2 mm. Par la suite, l'efficacité de la méthode est évaluée avec d'autres défauts et est comparée aux autres méthodes décrites aux chapitres V et VI : les méthodes EF-AL-CSI et EF-CSI avec  $\lambda$  automatique.



## IX.1 Introduction du Lagrangien augmenté

### IX.1.1 Résultats

La méthode EF-AL-Basique est testée avec le défaut de 2 mm de profondeur déjà présenté au chapitre VIII. Ce défaut est employé car il est plus difficile à reconstruire que le défaut de 1 mm et les effets du Lagrangien augmenté sont plus visibles. Le réglage sous-optimal  $(\beta, \gamma, \delta) = (10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-2})$  est choisi pour les hyperparamètres. C'est le même réglage que celui employé pour les méthodes EF-Basique et EF-CSI. En effet, le maillage ne change pas par rapport au chapitre VIII or le maillage a un impact important sur le choix de  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . De plus,  $\lambda$  ne nécessite plus d'être réglé, exceptée sa valeur initiale qui vaut  $10^{10}$  avec la règle proposée au chapitre VI. On présente les résultats de reconstruction obtenus à la figure IX.1.

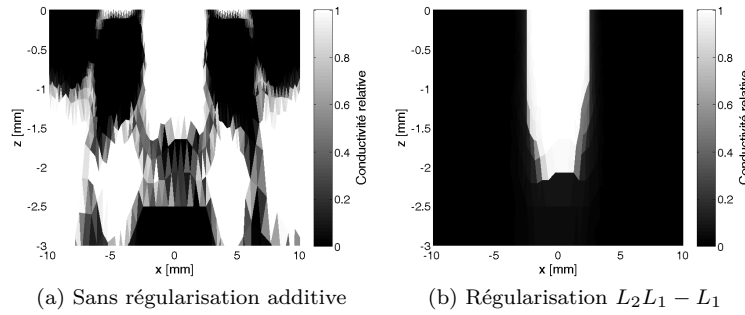


FIG. IX.1 – Effet de la régularisation sur la méthode EF-AL-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur

Il est difficile de reconnaître le défaut avec la reconstruction non régularisée même si elle semble présenter une bonne résolution horizontale jusqu'à 1 mm de profondeur. Cependant, en dessous de cette profondeur, la solution est très bruitée et inexploitable. La régularisation permet d'améliorer grandement les reconstructions puisque le défaut reconstruit a une profondeur d'environ 2 mm. Le défaut reconstruit est très proche du défaut simulé, ce qui illustre l'efficacité de la méthode.

Pour étudier la décroissance de l'EQR au cours des itérations, on la trace à la figure IX.2.

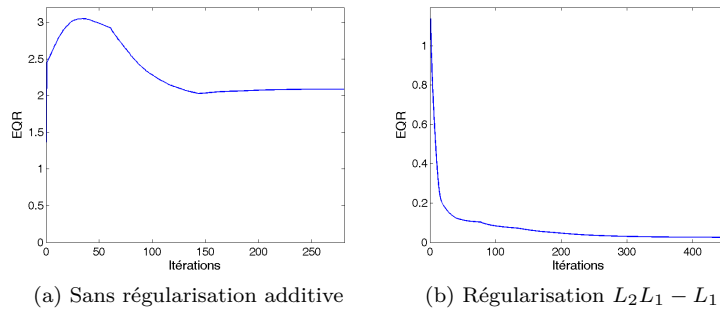


FIG. IX.2 – EQR pour EF-AL-Basique au cours des itérations pour le défaut de 2 mm de profondeur

L'EQR se dégrade dans le cas non-régularisé, la solution procurée est donc moins bonne que la solution initiale qui ne comporte pas de défaut. A l'inverse, dans le cas régularisé, la reconstruction est plus proche du défaut simulé que l'initialisation. Le nombre d'itérations CSI nécessaire pour obtenir une solution a augmenté par rapport au cas non-régularisé. En théorie, en régularisant le conditionnement du problème est amélioré, une diminution du nombre d'itérations nécessaires

aurait été attendue.

L'objectif de la méthode de Lagrangien augmenté est de minimiser un problème sous contraintes. La contrainte concerne ici l'équation de couplage, ce qui est équivalent à faire tendre  $\lambda$  vers l'infini dans les critères XF-Basique et XF-CSI. La méthode du Lagrangien augmenté est donc censée minimiser le critère primal  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$ . On note également que le critère minimisé par les méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI est exactement le même en théorie. Pour s'assurer du bon fonctionnement de la méthode, il s'agit de vérifier que le critère primal diminue. A la figure IX.3, les courbes du Lagrangien augmenté  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa})$  et du critère primal  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  au cours des itérations sont présentées.

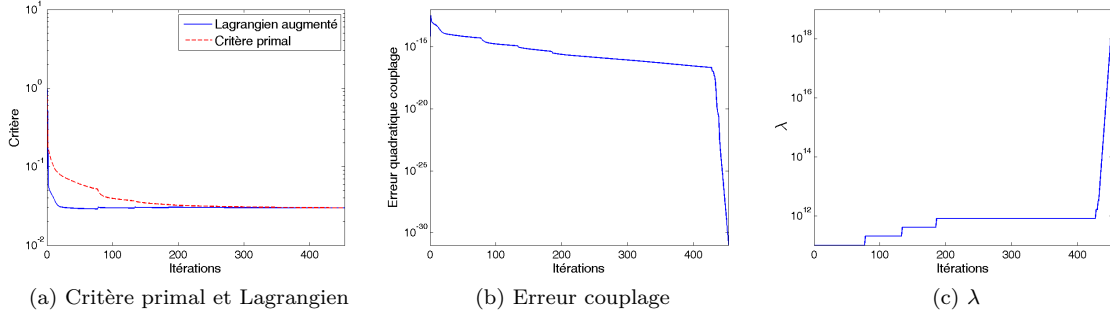


FIG. IX.3 – Etude du critère primal  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$ , de l'erreur de couplage et de  $\lambda$  au cours des itérations

Il apparaît sur cette figure que le critère primal diminue au cours des itérations. De plus, on voit également que le Lagrangien rejoint le critère primal pour les dernières itérations. En effet, lorsque la contrainte est respectée,  $\mathbf{t}_\ell$  est nul, le Lagrangien augmenté et le critère ont les mêmes valeurs. L'effet de  $\lambda$  sur l'erreur de couplage est également visible. En effet, l'erreur de couplage tend vers 0 lorsque  $\lambda$  augmente. Lors des dernières itérations,  $\lambda$  augmente très fortement, ce qui force l'erreur de couplage à tendre vers 0.

### IX.1.2 Initialisation

Tout comme au chapitre VIII, la présence de minima locaux ainsi que la convergence de la méthode sont étudiés. A la figure IX.4, on présente les résultats de reconstruction pour la méthode EF-Basique avec l'initialisation avec le défaut  $\mathbf{x}^*$  utilisé pour simuler les données.

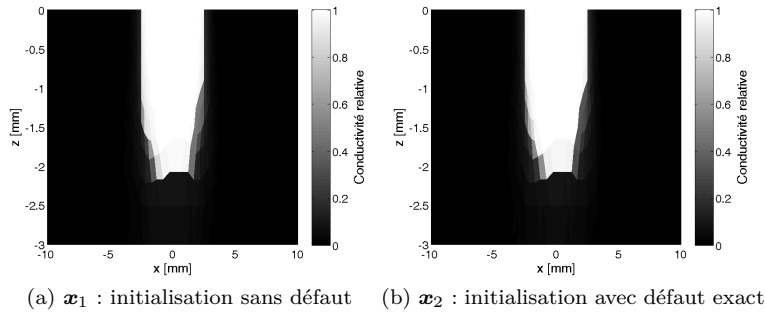
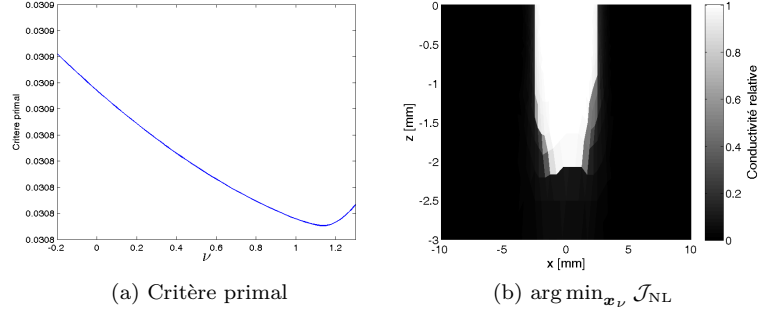


FIG. IX.4 – Résultats de reconstruction par EF-AL-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur pour deux initialisations

Il est visible sur cette figure que les reconstructions obtenues sont très proches mais comportent quelques différences. En effet, sur les bords des reconstructions, on peut noter des dissemblances.

De plus, il semble que l'initialisation avec la plaque sans défaut est plus proche du défaut exact à la convergence. Afin de déterminer s'il s'agit de deux minima locaux, on trace le critère  $\mathcal{J}_{NL}(\mathbf{x}_\nu)$  en posant  $\mathbf{x}_\nu = \nu \mathbf{x}_1 + (1 - \nu) \mathbf{x}_2$  en appelant  $\mathbf{x}_1$  la solution obtenue en initialisant avec  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}_2$  la solution obtenue en initialisant avec  $\mathbf{x}^*$ . Le critère en question est tracé à la figure IX.5


 FIG. IX.5 – Critère en fonction de  $\nu$ 

On remarque que le minimum du critère primal est plus proche de  $\mathbf{x}_1$  que de  $\mathbf{x}_2$ . Toutefois, tout comme ce qui est observé au chapitre VIII, le minimum dans Vect  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  ne se situe pas en  $\mathbf{x}_2$ . Le critère semble très peu diminuer avec la variation de  $\nu$  illustrant ainsi le caractère très plat du critère. La meilleure reconstruction au sens du critère primal dans cet espace est également tracée sur cette même figure.

## IX.2 Comparaisons entre EF-Basique et EF-AL-Basique

### IX.2.1 Défaut de 2 mm

Il s'agit désormais de comparer les méthodes EF-Basique et EF-AL-Basique pour montrer la nécessité de respecter la contrainte de couplage pour améliorer les reconstructions. Le défaut reconstruit par chacune des deux méthodes est tracé à la figure IX.6.

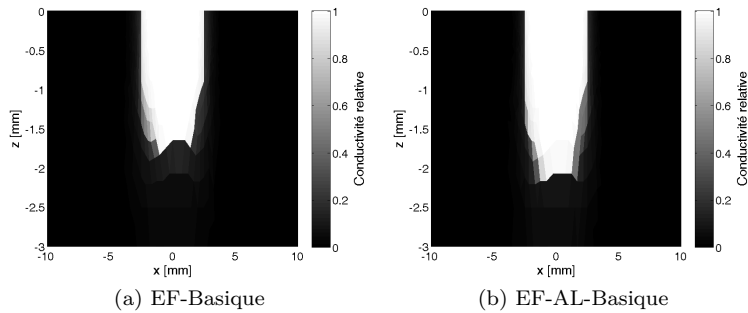


FIG. IX.6 – Reconstructions pour la méthode EF-Basique (a) et EF-AL-Basique (b) pour le défaut de 2 mm de profondeur

Il y a une forte différence visuelle importante entre les solutions pour les deux méthodes dans le cas du défaut 2 mm de profondeur. La méthode EF-AL-Basique reconstruit mieux le défaut en profondeur que la méthode EF-Basique. L'apport du Lagrangien augmenté est indéniable. On trace à la figure IX.7 l'EQR au cours des itérations par la méthode EF-Basique et par la méthode EF-AL-Basique afin d'étudier les différences de comportement entre les méthodes.

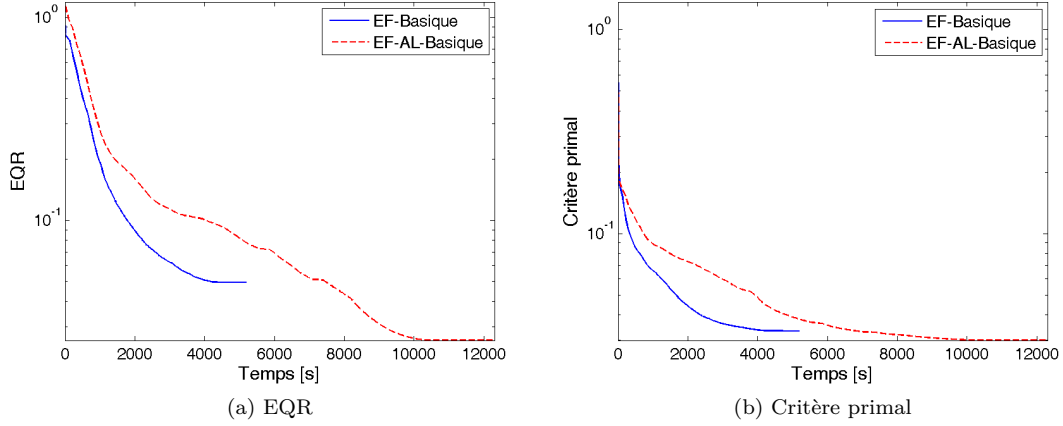


FIG. IX.7 – EQR et critère primal  $\mathcal{J}_{NL}(\mathbf{x})$  pour la méthode EF-Basique et pour la méthode EF-AL-Basique

Il est visible que la méthode EF-AL-Basique a une EQR supérieure à celle de la méthode EF-Basique à temps équivalent. Cependant, à la fin de la minimisation, la méthode EF-AL-Basique a une solution avec une meilleure EQR comme le montre la figure IX.6. On remarque également sur la figure IX.7 que le temps de calcul nécessaire pour la convergence est plus élevé pour la méthode EF-AL-Basique. A cette courbe s'ajoute l'évolution de  $\lambda$  au cours des itérations ainsi que le nombre d'itérations de GC afin de mettre en évidence la dégradation du conditionnement du problème.

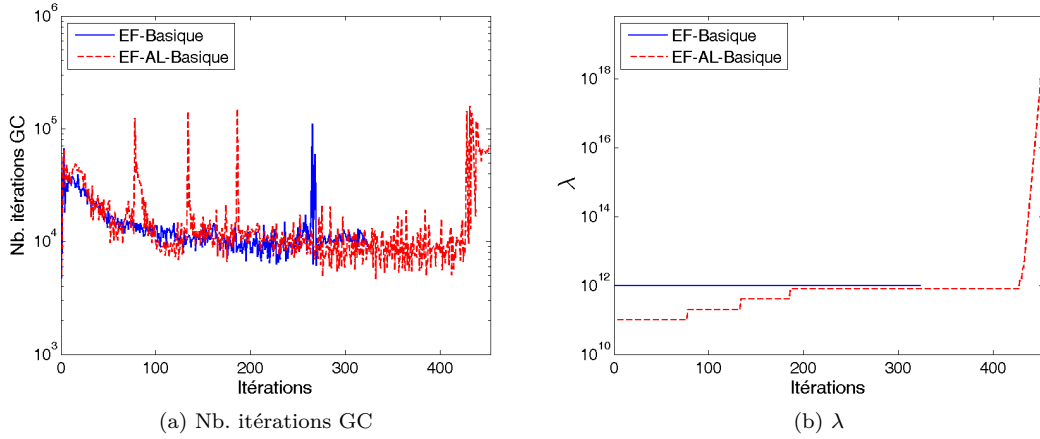


FIG. IX.8 –  $\lambda$  et nombre d'itérations GC pour la méthode EF-Basique et pour la méthode EF-AL-Basique

Il apparaît sur la figure IX.8 que le nombre d'itérations CSI est plus élevé pour la méthode EF-AL-Basique que pour la méthode EF-Basique. Ce point n'est pas si étonnant étant donné que la méthode EF-AL-Basique peut se résumer grossièrement à une succession de méthodes EF-Basique.

De manière globale, chaque itération CSI pour EF-AL-Basique nécessite autant d'itérations GC que la méthode EF-Basique lors de la minimisation par rapport à  $\mathbf{e}$ . Le coût de chaque itération GC est à peu près le même pour les deux méthodes. Il faut noter tout de même qu'il y a quelques pics en ce qui concerne le nombre d'itérations GC pour la méthode EF-AL-Basique. Il apparaît que ces pics correspondent à chaque fois à une augmentation de  $\lambda$ . Autrement dit, au début de

chaque boucle de Lagrangien augmenté le nombre d'itérations GC augmente énormément. A la fin de l'algorithme,  $\lambda$  augmente à chaque itération CSI, par conséquent le nombre d'itérations GC est très important aux dernières itérations. Le coût calculatoire est donc plus important pour la méthode EF-AL-Basique. Enfin, le nombre d'itérations de GC nécessaires pour la méthode EF-AL-Basique semble augmenter fortement lorsque  $\lambda$  augmente très fortement illustrant ainsi la dégradation du conditionnement du problème.

### IX.2.2 Autres défauts

L'objectif est d'étudier les effets du Lagrangien augmenté sur les reconstructions. Il est proposé de tester la méthode proposée sur d'autres défauts avec le même réglage pour les hyperparamètres. L'étude débute avec le défaut de profondeur 1 mm et de largeur 5 mm. On effectue les reconstructions à la figure IX.9.

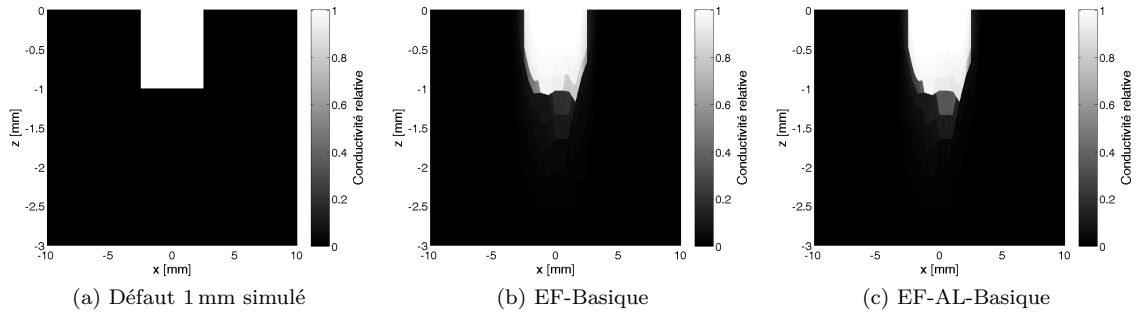


FIG. IX.9 – Effet du Lagrangien augmenté sur EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

Le réglage adopté est efficace pour le défaut de 1 mm de profondeur. De plus, il semble, sur cette figure, que la méthode EF-AL-Basique est plus efficace que EF-Basique en termes de qualité de reconstruction. En effet, les éléments non-nuls dans le cas de EF-Basique semblent prendre une valeur plus élevée. Les bords sont alors plus francs. Pour faire des comparaisons équivalentes, la reconstruction du défaut long avec 1 mm de profondeur et 8 mm de largeur est également effectuée. Les résultats sont présentés à la figure IX.10.

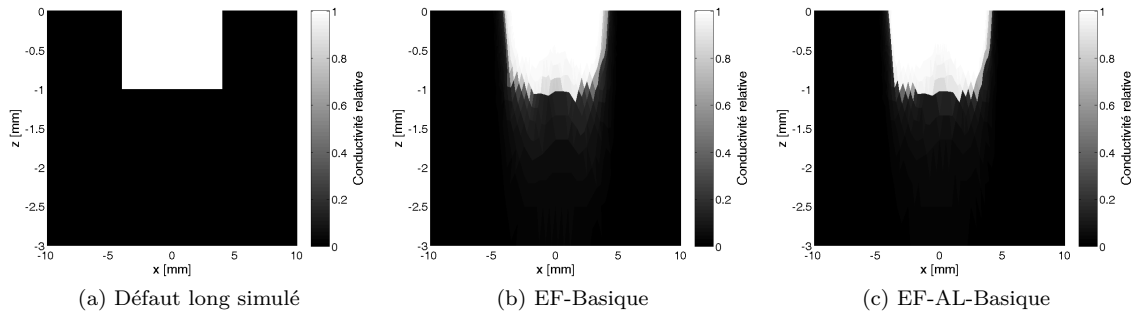


FIG. IX.10 – Effet du Lagrangien augmenté sur EF-Basique pour le défaut long

Le réglage adopté est efficace pour le défaut long. De plus, il est visible sur cette figure que la méthode EF-AL-Basique est également plus efficace que EF-Basique en termes de qualité de reconstruction. Les bords sont plus francs dans le cas avec Lagrangien augmenté. On présente à la table IX.1, une comparaison entre les EQR pour différents défauts pour les deux méthodes proposées.

	1 mm	1.5 mm	2 mm	2.5 mm	Long
Basique	$2,91 \times 10^{-2}$	$4,54 \times 10^{-2}$	$4,96 \times 10^{-2}$	$5,29 \times 10^{-2}$	$4,03 \times 10^{-2}$
AL-Basique	$3,59 \times 10^{-2}$	$4,47 \times 10^{-2}$	$2,56 \times 10^{-2}$	$3,47 \times 10^{-2}$	$4,15 \times 10^{-2}$
Taux	23.4%	-1.52%	-48.2%	-34.4%	2.94%

TAB. IX.1 – EQR pour les deux méthodes pour différents défauts

Il est visible sur cette table que le gain en termes de qualité de reconstruction peut être très important dans les cas de défauts plus profonds donc plus difficiles. Cependant, une forte perte en termes de EQR peut être provoquée pour des cas plus faciles même si visuellement, comme le montre l'annexe H, il y a peu de différences visuelles dans ces cas-là. Une forte variation de l'EQR ne signifie pas nécessairement une forte dégradation visuelle des résultats.

Il est intéressant se demander quel est l'impact de l'emploi du Lagrangien dans la minimisation du critère. C'est pourquoi, le nombre total d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence est présenté à la table IX.2.

	1 mm	1.5 mm	2 mm	2.5 mm	Long
Basique	104	252	278	492	118
AL-Basique	132	204	454	414	220

TAB. IX.2 – Nombre d'itérations CSI pour les deux méthodes pour différents défauts

	1 mm	1.5 mm	2 mm	2.5 mm	Long
Basique	$3,64 \times 10^3$	$6,74 \times 10^3$	$5,18 \times 10^3$	$6,66 \times 10^3$	$4,51 \times 10^3$
AL-Basique	$8,67 \times 10^3$	$1,07 \times 10^4$	$1,23 \times 10^4$	$1,45 \times 10^4$	$1,47 \times 10^4$

TAB. IX.3 – Temps total [s] pour les deux méthodes pour différents défauts

Etant donné que la méthode de Lagrangien augmenté ajoute une boucle itérative à la méthode XF-Basique, il est légitime de penser *a priori* que la méthode de Lagrangien augmenté est beaucoup plus longue en termes d'itérations et de temps de calcul que cette méthode. On observe à la table IX.2 que ça n'est pas nécessairement le cas en termes de nombre d'itérations CSI. Par contre, cette méthode est plus longue en termes de temps de calcul avec EF-AL-Basique. Ceci laisse penser qu'en moyenne une itération CSI nécessite plus d'itérations GC. Il faut tout de même noter que le temps de calcul n'est multiplié au maximum que par deux. Ceci est peu, compte tenu du nombre de boucles de Lagrangien augmenté effectuées, de l'ordre d'une trentaine. De plus, le gain en qualité justifie le temps de calcul supplémentaire.

## IX.3 Introduction des sources de contraste

### IX.3.1 Résultats

Les résultats des méthode EF-Basique/EF-CSI avec ou sans calcul automatique de  $\lambda$  sont présentés sans contraintes de couplage au chapitre VIII. Dans la section précédente, les résultats de l'adaptation de la méthode du Lagrangien augmenté à la méthode XF-Basique sont présentés. Une nette amélioration de la qualité de reconstruction est observable sur les défauts à partir de 1,5 mm profondeur. C'est pourquoi, le Lagrangien augmenté est également adapté au critère XF-CSI. Cette méthode permet de contraindre les équations de couplage, l'erreur sur cette équation

a un impact important sur la qualité de reconstruction pour des défauts profonds comme cela a été montré au chapitre VIII. Ceci permet également de s'affranchir du réglage de  $\lambda$ .

La méthode EF-AL-CSI est comparée avec la méthode EF-CSI avec le réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$  et avec la méthode EF-AL-Basique pour un défaut de 2 mm. Les reconstructions obtenues sont présentées à la figure IX.11.

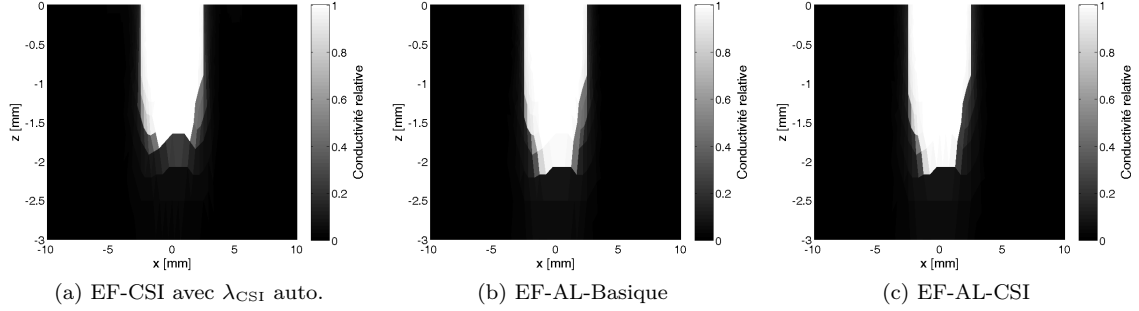


FIG. IX.11 – Reconstructions pour la méthode EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  auto.(a), EF-AL-Basique et EF-AL-CSI (c) pour le défaut de 2 mm de profondeur

Le Lagrangien augmenté améliore significativement les résultats de reconstruction sur la méthode EF-CSI. Il y a une très faible différence entre les deux reconstructions entre EF-AL-Basique et EF-AL-CSI car d'un point de vue théorique le critère minimisé est le même par ces deux méthodes : le critère  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$ . Afin d'étudier la convergence des méthodes et leur efficacité, l'EQR et le critère primal au cours des itérations avec les méthodes EF-CSI et réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$ , EF-AL-Basique et EF-AL-CSI pour le défaut de 2 mm sont tracés à la figure IX.12.

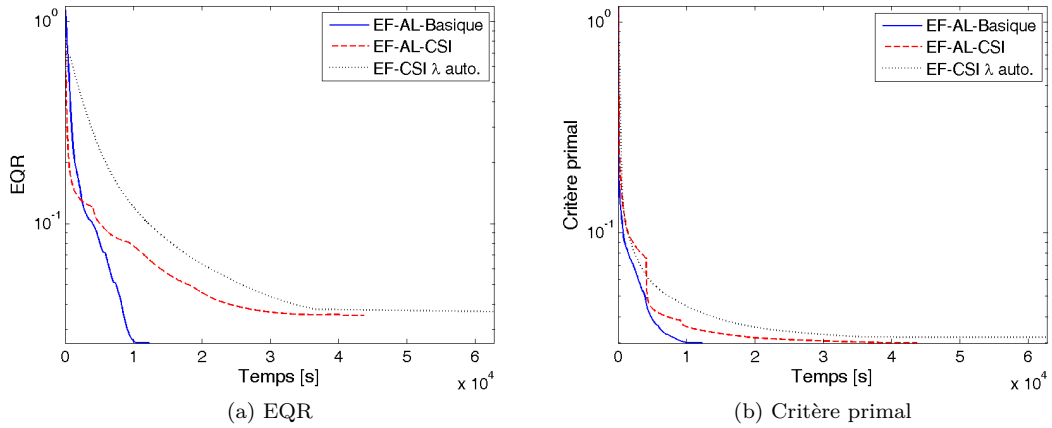


FIG. IX.12 – Comparaisons des méthodes EF-AL-Basique, EF-AL-CSI et EF-CSI avec  $\lambda_{\text{CSI}}$  automatique pour le défaut de 2 mm de profondeur

La méthode EF-CSI avec réglage automatique de  $\lambda_{\text{CSI}}$  est moins performante que les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI, montrant que le réglage de  $\lambda$  automatique par méthode CSI n'est pas suffisamment élevé. Cependant, on peut également remarquer qu'à temps équivalents, les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI donnent de meilleurs résultats en termes de critère primal et d'EQR. Ces méthodes minimisent plus efficacement le critère primal. Ce dernier point n'est pas étonnant car la méthode EF-CSI ne minimise pas le critère primal mais le critère CSI.

En termes d'EQR, il semble que la méthode EF-AL-CSI soit moins performante que la méthode EF-AL-Basique alors que les reconstructions obtenues sont solutions du même problème.

Visuellement, la différence entre les deux reconstructions est très faible. Ceci montre que l'EQR n'est pas nécessairement le meilleur indicateur pour évaluer l'efficacité des méthodes même si elle permet de donner une tendance.

Par contre, la méthode EF-AL-Basique donne les meilleurs résultats en termes d'EQR. De plus, à temps de calcul égaux, elle est plus efficace que ce soit pour l'EQR ou la minimisation du critère primal. Il a été montré au chapitre VIII que le critère CSI était plus difficile à minimiser et nécessitait plus d'itérations CSI pour converger. Le Lagrangien augmenté de la méthode EF-AL-CSI est plus mal conditionné que celui de la méthode EF-AL-Basique expliquant qu'il existe une légère différence entre les deux solutions. En ce qui concerne le temps de calcul, chaque évaluation du gradient et du critère est très coûteuse dans la méthode EF-AL-CSI. C'est pour cette raison que la méthode EF-AL-Basique est plus efficace.

### IX.3.2 Initialisation

Tout comme au chapitre VIII et dans ce même chapitre, on cherche à étudier l'effet de l'initialisation et savoir s'il existe des minima locaux. La méthode est initialisée avec  $\mathbf{x}_0$  (le cas sans défaut) procurant ainsi la solution  $\mathbf{x}_1$  et avec  $\mathbf{x}^*$  (le défaut à reconstruire) procurant la solution  $\mathbf{x}_2$ . Les résultats sont présentés à la figure IX.13.

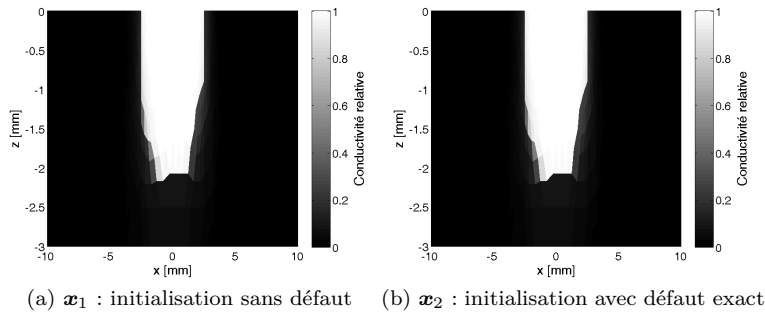


FIG. IX.13 – Résultats de reconstruction par EF-AL-CSI pour le défaut de 2 mm de profondeur pour 2 initialisations

Les résultats sont visuellement très proches et quasi-identiques. Les résultats de reconstruction sont très proches de ceux obtenus avec la méthode EF-AL-Basique.

Le critère est très plat et varie très peu en fonction de  $\nu$ . Une rapide comparaison avec la figure IX.5 montre que les meilleures reconstructions obtenues par EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont très proches.

### IX.3.3 Comparaison avec les autres méthodes

Pour faire une comparaison plus exhaustive entre les différentes méthodes, il est nécessaire de tester différents défauts comme précédemment. Les EQR pour les différents défauts reconstruits avec les différentes méthodes sont résumées à la table IX.4.

	1 mm	1, 5 mm	2 mm	2, 5 mm	Long
AL-Basique	$3,59 \times 10^{-2}$	$4,47 \times 10^{-2}$	$2,56 \times 10^{-2}$	$3,47 \times 10^{-2}$	$4,15 \times 10^{-2}$
AL-CSI	$4,52 \times 10^{-2}$	$4,73 \times 10^{-2}$	$3,51 \times 10^{-2}$	$3,15 \times 10^{-2}$	$4,38 \times 10^{-2}$
CSI $\lambda$ auto.	$2,94 \times 10^{-2}$	$3,95 \times 10^{-2}$	$3,67 \times 10^{-2}$	$4,62 \times 10^{-2}$	$3,58 \times 10^{-2}$

TAB. IX.4 – EQR pour les différentes méthodes et les différents défauts



La méthode EF-AL-Basique et la méthode EF-AL-CSI sont les méthodes plus efficaces pour les défauts reconstruits que la méthode EF-CSI avec  $\lambda$  automatique. Cependant, l'écart est plus important pour les défauts profonds qui sont les plus difficiles à reconstruire. L'emploi du Lagrangien augmenté améliore donc les résultats par rapport à la méthode EF-CSI avec le réglage de  $\lambda$  automatique. Ceci confirme que le respect de la contrainte de couplage a un impact important sur les résultats. Les reconstructions pour tous les défauts et toutes les méthodes de la table sont présentées à l'annexe H. Cependant, il faut noter qu'il existe un écart non négligeable en termes d'EQR entre les deux méthodes de Lagrangien augmenté. Pourtant, les résultats de reconstructions sont quasi-identiques pour ces défauts comme le montre l'annexe H.

Afin de comparer plus en détails les méthodes, on utilise la procédure proposée au chapitre VII et déjà employée au chapitre VIII pour estimer profondeur et largeur du défaut. Les profondeurs et les largeurs estimées par les différentes méthodes comparées sont résumées respectivement aux tables IX.5 et IX.6.

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
Vraie profondeur	1	1,5	2	2,5	1
AL-Basique	1,04	1,46	2,06	2,14	1,04
AL-CSI	1,06	1,46	2,06	2,16	1,06
CSI $\lambda$ auto.	1,04	1,44	1,66	2,06	1,04

TAB. IX.5 – Profondeur pour les différentes méthodes et les différents défauts

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
Vraie largeur	5	5	5	5	8
AL-Basique	4,95	4,9	5	5	7,6
AL-CSI	4,7	4,8	4,85	5	7,65
CSI $\lambda$ auto.	5	5	5	5	7,75

TAB. IX.6 – Largeur pour les différentes méthodes et les différents défauts

Contrairement à ce que laisse penser la table IX.4, on remarque à la table IX.5 que les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont les plus efficaces et qu'elles estiment plus précisément la profondeur que les autres méthodes pour tous les défauts à reconstruire. Par contre, en ce qui concerne la largeur du défaut, le critère EF-CSI avec  $\lambda$  automatique semble plus précise. Néanmoins, les reconstructions des autres méthodes ont des largeurs peu différentes de la largeur exacte. Une fois de plus, la largeur estimée ne semble pas discriminante pour le choix de l'algorithme contrairement à la profondeur. Il se peut que cette petite différence au niveau de la largeur augmente fortement l'EQR pour les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI par rapport à la méthode EF-CSI avec  $\lambda$  constant.

Les méthodes développées ont pour objectif de minimiser le critère primal. Il est intéressant de les comparer en termes de critère primal pour les solutions obtenues. On résume à la table IX.7, les valeurs du critère primal à la convergence des méthodes testées.

On remarque sur cette table que les méthodes sont très proches entre elles en termes de critère primal. Il est difficile de discriminer les méthodes avec cette grandeur. Cependant, l'écart entre EF-AL-Basique et EF-CSI avec  $\lambda$  automatique est plus grand lorsque le défaut est profond. De plus, le critère primal des solutions de EF-AL-Basique est toujours plus faible que EF-CSI. Ce dernier point n'est pas étonnant étant donné que la méthode EF-AL-Basique sert à minimiser le critère primal. La méthode EF-CSI minimise le critère CSI. Enfin, il peut être noté que l'écart

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
AL-Basique	$2,88 \times 10^{-2}$	$2,93 \times 10^{-2}$	$3,00 \times 10^{-2}$	$3,14 \times 10^{-2}$	$3,49 \times 10^{-2}$
AL-CSI	$2,89 \times 10^{-2}$	$2,93 \times 10^{-2}$	$3,01 \times 10^{-2}$	$3,13 \times 10^{-2}$	$3,49 \times 10^{-2}$
CSI $\lambda$ auto.	$2,89 \times 10^{-2}$	$2,94 \times 10^{-2}$	$3,19 \times 10^{-2}$	$3,24 \times 10^{-2}$	$3,52 \times 10^{-2}$

TAB. IX.7 – Critère primal pour les différentes méthodes et les différents défauts

en terme de critère primal est très faible entre EF-AL-Basique et EF-AL-CSI, ce qui est normal car les deux méthodes minimisent le même critère. Cependant, il peut être remarqué qu'un faible écart en critère primal ne correspond pas à un faible écart en EQR (cf IX.4). Ceci montre que l'EQR n'est pas nécessairement adapté et que le critère a quelques problèmes de conditionnement.

Pour étudier le conditionnement du problème, le nombre d'itérations CSI nécessaires pour atteindre la convergence pour chacune des méthodes employées est résumé à la table IX.8.

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
AL-Basique	132	204	454	414	220
AL-CSI	241	240	542	542	420
CSI $\lambda$ auto.	265	680	1000	1000	272

TAB. IX.8 – Nombre d'itérations CSI pour les différentes méthodes et les différents défauts

Le nombre d'itérations CSI est systématiquement le plus faible dans le cas de la méthode EF-AL-Basique. Ceci confirme que le critère est mieux conditionné et plus facile à minimiser. De manière globale, la méthode EF-AL-CSI nécessite moins d'itérations que la méthode EF-CSI avec réglage automatique de  $\lambda$ , excepté pour le défaut long. Le nombre d'itérations CSI n'est pas le meilleur moyen de comparer le coût de calcul de chaque méthode contrairement au temps de calcul. C'est pourquoi, le temps de calcul est listé à la table IX.9

	1 mm	1,5 mm	2 mm	2,5 mm	Long
AL-Basique	$8,67 \times 10^3$	$1,07 \times 10^4$	$1,23 \times 10^4$	$1,45 \times 10^4$	$1,47 \times 10^4$
AL-CSI	$1,88 \times 10^4$	$1,68 \times 10^4$	$4,37 \times 10^4$	$4,99 \times 10^4$	$3,77 \times 10^4$
CSI $\lambda$ auto.	$1,28 \times 10^4$	$4,38 \times 10^4$	$6,28 \times 10^4$	$5,27 \times 10^4$	$1,79 \times 10^4$

TAB. IX.9 – Temps en [s] pour les différentes méthodes et les différents défauts

La méthode EF-AL-Basique est la méthode la plus rapide d'après les temps de calcul affichés. On remarque que la méthode EF-AL-CSI est moins coûteuse en terme d'itérations CSI que la méthode EF-CSI avec  $\lambda$  automatique et plus coûteuse que la méthode EF-AL-Basique. Le ratio en temps de calcul pour les deux méthodes est de l'ordre de 3.

Tout comme au chapitre VIII, on cherche à étudier les limites des méthodes et afficher certaines tendances. Les diagrammes de la profondeur et du temps nécessaires pour résoudre le problème en fonction de la profondeur du défaut à reconstruire sont présentés à la figure IX.14.

Les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont les méthodes les plus efficaces parmi toutes les méthodes présentées. Les profondeurs calculées sont quasi-identiques. Elle présentent de bons résultats de reconstruction jusqu'à 2 mm de profondeur. La méthode EF-CSI avec  $\lambda$  automatique est efficace jusqu'à 1,75 mm. En termes de temps de calcul, il apparaît qu'elle est beaucoup plus

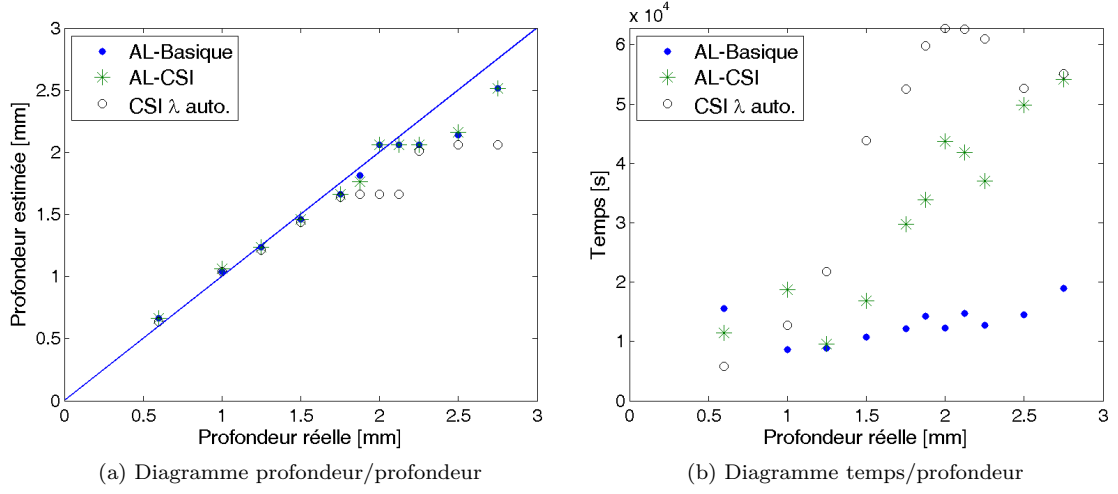


FIG. IX.14 – Diagrammes de la profondeur estimée (a) et du temps (b) en fonction de la profondeur du défaut à estimer pour les méthodes EF-AL-Basique, EF-AL-CSI et EF-CSI avec réglage automatique de  $\lambda$

coûteuse que la méthode EF-AL-Basique et globalement plus coûteuse que la méthode EF-AL-CSI. En termes de rapport qualité / temps de calcul, la méthode EF-AL-CSI présente des résultats moins bons que la méthode EF-AL-Basique. Il semble que le Lagrangien de la méthode EF-AL-CSI soit plus difficile à minimiser par rapport à  $(\mathbf{w}, \mathbf{x})$  et maximiser par rapport à  $\kappa$ .

## IX.4 Conclusion

En comparaison avec la méthode EF-Basique, il apparaît de manière très claire que l'introduction du Lagrangien augmenté améliore les reconstructions. En plus, de cette forte amélioration, les méthodes avec Lagrangien augmenté nécessitent très peu de modifications par rapport aux méthodes XF-Basique et XF-CSI. De plus, l'augmentation du coût de calcul n'est pas très élevée que ce soit pour la méthode EF-AL-Basique ou EF-AL-CSI. Enfin, l'emploi de Lagrangien augmenté permet d'éviter le réglage de  $\lambda$ .

La méthode CSI avec  $\lambda$  automatique fait office de référence en tomographie de diffraction. Comme cela a déjà été présenté dans le chapitre VIII, cette méthode adaptée aux EF procure de bonnes solutions. Cependant, la méthode EF-AL-Basique donne de meilleurs résultats avec un coût de calcul et de mémoire strictement inférieur. Même si le coût de calcul élevé de la méthode EF-CSI provient de la matrice inverse  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  qu'évite le critère XF-Basique. Il se peut que dans des cas 3D, ce coût de calcul à cause de la matrice  $\mathbf{A}_{\text{inv}}$  soit encore plus important. C'est pourquoi, même si la méthode EF-AL-CSI donne des résultats aussi bons que la méthode EF-AL-Basique, cette dernière est préférable. Son coût de calcul et de mémoire est inférieur à celui de EF-AL-CSI.

Les méthodes EF-AL-Basique et EF-AL-CSI sont censées minimiser le même critère primal  $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$  comme cela a été expliqué au chapitre V. Les résultats pour ces deux méthodes sont très proches, même s'il existe une légère différence entre les solutions. Il semble que cette différence provienne de problèmes de conditionnement dans le cas du critère XF-CSI. Cette différence de conditionnement dans les deux critères a déjà été formulée dans le chapitre VIII et peut provenir de la multiplication par  $\mathbf{C}_x^m$  de l'équation de couplage (cf. équation (V.11)). Cette matrice contient beaucoup de lignes et de colonnes exactement nulles. L'emploi de la méthode de Lagrangien augmenté accentue peut-être ce problème.

Dans notre cas, l'amélioration des reconstructions par l'introduction du Lagrangien augmenté est indéniable. Dans (Carfantan, 1996), l'introduction du terme de Lagrangien augmenté dans le critère MGM n'améliore pas les résultats. Une explication peut être liée à l'acquisition des données, celles-ci sont acquises tout au tour de l'objet testé et sont donc plus informatives. Il se peut également que le  $\lambda$  adopté soit suffisamment grand pour que l'erreur de couplage tende vers 0 sans qu'il n'y ait de problème de convergence.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusions

L'objectif de cette thèse était de proposer des méthodes de reconstruction de défauts dans des plaques métalliques basées sur un modèle direct physique. Suite aux méthodes d'inversion développées par EDF et l'EPM, il a été constaté qu'un modèle direct linéaire, entre la conductivité relative et les données, et estimé à l'aide de défauts connus avait ses limites. En effet, la linéarité du modèle introduit une ambiguïté entre largeur et profondeur du défaut reconstruit. C'est pourquoi, des modèles directs non-linéaires basés sur les équations électromagnétiques ont été étudiés dans cette thèse. Des méthodes différentielles de modélisation numérique ont été employées telles que les *différences finies* (DF) et les *éléments finis* (EF). Ces méthodes sont plus simples et plus flexibles à employer que les méthodes intégrales pour les géométries complexes même si ces dernières méthodes sont très classiques en inversion.

Une fois ces modèles implémentés, on a proposé une méthode d'inversion inspirée des méthodes *modified gradient method* (MGM (Kleinman and van den Berg, 1992)) et *contrast source inversion* (CSI (van den Berg and Kleinman, 1997)) très utilisées en tomographie de diffraction. Bien qu'en général ces méthodes soient basées sur des modèles directs intégraux, il a été montré dans ce mémoire qu'il était possible d'adapter ces méthodes à des modèles différentiels comme les différences finies et les éléments finis en proposant les critères XF-MGM et XF-CSI qui sont respectivement les adaptations des critères MGM et CSI à un modèle différentiel XF (DF ou EF).

Les méthodes de type MGM/CSI sont basées sur la transformation du problème de minimisation d'un critère non-linéaire en un critère bilinéaire plus facile à minimiser. La bilinéarité provient des équations du modèle et est conservée grâce à la relaxation de l'équation de couplage et l'introduction d'une variable auxiliaire ou variable cachée. Ces méthodes sont très utilisées en tomographie de diffraction mais à notre connaissance elles n'ont jamais été généralisées à d'autres domaines d'application voire à d'autres problèmes non-linéaires. Dans ce mémoire, une de nos contributions concerne la généralisation de ces méthodes au cas de la tomographie par courants de Foucault.

L'obtention des critères XF-MGM et XF-CSI nécessite des modifications des équations de couplage et d'observation pour obtenir des équations identiques à celles obtenues par formulation intégrale. Ces modifications sont utilisées pour un modèle direct DF dans (Abubakar et al., 2008a; Gilmore et al., 2009), mais leur nécessité n'est pas expliquée ni justifiée dans la littérature à notre connaissance. Les critères XF-MGM et XF-CSI étudiés font tous deux intervenir l'inverse d'une matrice. Cette matrice inverse est pleine et sa signification est proche de celle d'une matrice de Green. Bien que cette matrice ne soit pas directement inversée grâce à une décomposition LU, chaque multiplication matricielle dans laquelle cette matrice inverse intervient est coûteuse. L'opération d'inversion est toujours très coûteuse, c'est pourquoi elle doit être évitée dans la mesure du possible. Pour ces raisons, on a également proposé de minimiser le critère XF-Basique proposé dans ce mémoire. Ce dernier exploite les équations du modèle direct sans les modifier, d'où l'em-

ploi du terme *Basique* pour qualifier le critère. Le critère XF-Basique ne fait intervenir que des multiplications matricielles avec des matrices creuses. Un avantage important de la modélisation par méthode différentielle est l'obtention de matrices creuses. Parmi les différents critères évoqués, seul le critère XF-Basique tire pleinement profit de cette caractéristique. C'est pourquoi il est proposé dans ce mémoire. Il n'a jamais été utilisé en tomographie de diffraction.

Par construction, les critères XF-MGM, XF-CSI et XF-Basique tolèrent une erreur sur l'équation de couplage. Il a été montré dans ce mémoire que, dans le cas de la tomographie par CF, cette tolérance pouvait avoir un impact négatif sur les reconstructions pour des cas difficiles, notamment les défauts profonds. En outre le conditionnement du problème est influencé par cette tolérance. La vitesse de convergence et l'efficacité de la minimisation sont donc liées à la contrainte imposée. Un coefficient de pondération  $\lambda$  sur l'erreur de l'équation de couplage permet de régler cette tolérance. Ce coefficient de pondération doit être choisi judicieusement de manière à respecter le plus possible l'équation de couplage tout en évitant les problèmes de conditionnement provoqués par une contrainte trop forte. Autrement dit, il faut choisir  $\lambda$  suffisamment grand pour que les solutions aient un sens physique mais suffisamment faible pour qu'obtenir une solution soit possible. Afin d'éviter ces problèmes de conditionnement, la méthode initialement proposée a été étendue par inclusion d'une technique de type Lagrangien augmenté. Ceci permet de contraindre l'équation de couplage tout en ne nécessitant que quelques modifications mineures aux méthodes XF-Basique et XF-CSI. Contraindre l'équation de couplage permet une forte amélioration des résultats de reconstruction tout en évitant le réglage de  $\lambda$ . En effet, il se peut que le caractère peu informatif des données nécessite de respecter les équations de couplage pour compenser ce manque d'informations. Les méthodes obtenues sont appelées XF-AL-Basique et XF-AL-CSI (AL pour *augmented Lagrangian*). La méthode XF-AL-Basique présente globalement des meilleurs résultats de reconstruction que la méthode XF-CSI avec le réglage heuristique de  $\lambda$  classiquement utilisé par Abubakar et al. (2008a). De plus, elle nécessite un temps et un coût de calcul plus faibles en général. En effet, l'heuristique utilisée impose un  $\lambda$  très fort au début de l'algorithme et de plus en plus faible au cours des itérations. De manière naturelle, c'est le comportement opposé qui est adapté.

Bien que les méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI minimisent le critère primal, les résultats de reconstruction comportent quelques petites différences. Cette différence peut être due à un problème de conditionnement lié au terme de couplage. Bien que la méthode de Lagrangien augmenté soit utilisée pour éviter les problèmes de conditionnement, celle-ci ne permet pas de s'en affranchir complètement. Les seules différences entre les deux méthodes concernent l'équation de couplage ainsi que la variable électromagnétique par rapport à laquelle la minimisation est effectuée. Il est possible que l'équation de couplage utilisée pour le critère XF-CSI soit moins bien conditionnée que celle employée pour le critère XF-Basique. Ceci peut expliquer cette différence de comportement entre ces deux méthodes.

Enfin, compte tenu du caractère mal-posé du problème et des informations *a priori* à disposition sur l'objet, on a eu recours à des techniques de régularisation afin de favoriser les reconstructions de défauts ayant une conductivité relative constante par morceaux et une surface petite par rapport au domaine étudié. Compte tenu du caractère surfacique des courants de Foucault, seuls les éléments dont la profondeur est inférieure à 5 mm sont estimés. Ceci définit ainsi une zone d'intérêt plus petite que le domaine de modélisation entier. Enfin, une des contributions de ce mémoire concerne l'étude des effets sur la reconstruction de l'utilisation d'un algorithme de minimisation sous contraintes de bornes pour les valeurs de la conductivité de la zone d'intérêt. Ces contraintes permettent d'améliorer l'efficacité de la reconstruction et de limiter le caractère instable du problème.

Le maillage pose quelques difficultés notamment à cause de la bobine. Il est difficile de trouver une discrétisation fixée qui permette d'être adaptée à toutes les positions du capteur. Afin d'éviter le maillage de la bobine, un modèle éléments finis avec éléments d'arêtes et *couplage intégral* (CI) a été testé. Ce modèle est ici nommé EF-CI et est présenté à l'annexe I. Le passage du modèle

éléments finis nodaux EF au modèle EF-CI a montré que le choix du modèle était important pour l'inversion. En effet, avec les modèles DF et EF, les méthodes proposées dans ce mémoire, et notamment XF-Basique et XF-AL-Basique, se sont révélées rapidement et facilement très efficaces. A l'inverse, avec le modèle EF-CI, comme on le montre à l'annexe I, ces méthodes ont été plus difficiles à mettre en œuvre et ont nécessité de fortes adaptations. En effet un changement de variable pour la régularisation et la minimisation ont été nécessaires. Les résultats alors obtenus sont moins bons que ceux obtenus avec le modèle EF classique, pour des coûts calculatoires et de mémoire bien supérieurs. Autrement dit, bien que ces deux modèles directs résolvent exactement le même problème physique, des comportements très différents ont été observés dans le cadre de l'inversion. On peut remarquer que le modèle EF est linéaire par rapport à la conductivité alors que le modèle EF-CI est linéaire par rapport à la résistivité. Cette différence peut être à l'origine des disparités entre les résultats de reconstruction pour les deux modèles. Il était *a priori* difficile de prévoir de telles difficultés à cause de différences en apparence mineures. Ceci montre la nécessité de caractériser soigneusement les modèles préalablement à leur utilisation en inversion même s'il paraît difficile de savoir *a priori* quel modèle choisir en termes de formulation et non de méthode numérique.

## Perspectives

### Cas d'application

Dans le contexte de cette thèse, les méthodes de reconstruction proposées devaient estimer des défauts dans des plaques métalliques. Cependant, compte tenu de la modélisation par éléments finis adoptée, il est possible d'adapter les méthodes de reconstruction pour des défauts dans des surfaces non-planes grâce à la flexibilité des EF. Cette flexibilité fait la force des modèles différentiels et notamment les modèles éléments finis qui emploient facilement des maillages triangulaires (2D) ou tétraédriques (3D). Il est envisageable d'adapter les méthodes proposées dans ce mémoire à des tubes dans le cas 2D avec des sondes axiales. Le problème est alors axisymétrique. Ceci permettrait d'effectuer une reconstruction d'un défaut en 2D dans le plan longitudinal du cylindre testé. En théorie, seul le modèle direct doit être modifié car la bilinéarité des équations est conservée.

De plus, jusqu'à présent, les objets reconstruits concernaient uniquement des défauts c'est-à-dire des manques de matière. Il est également possible de considérer des dépôts de matière pourvu que les dépôts soient non-magnétiques.

Dans le cas où de la matière magnétique intervient (pour des dépôts ou des manques de matière), des modifications importantes doivent être effectuées sur le modèle direct pour prendre en compte les variations de la perméabilité magnétique  $\mu$ . Il est possible dans ce cas que la bilinéarité par rapport à la variable d'intérêt et à la grandeur électromagnétique soit plus difficile à conserver. Néanmoins, il semble possible d'obtenir une formulation similaire à (Abascal et al., 2009; Skarlatos et al., 2007) dans laquelle deux termes bilinéaires interviennent dans les équations : l'un par rapport à la perméabilité magnétique  $\mu$  et au champ magnétique  $\vec{H}$  et l'autre par rapport à la conductivité électrique  $\sigma$  et au champ électrique  $\vec{E}$ .

Si la bilinéarité n'est pas conservée, les méthodes proposées sont toujours utilisables mais la minimisation par rapport à chaque variable peut être plus difficile et plus longue. En effet, la bilinéarité permet de faciliter la minimisation du critère, car le critère est quadratique par rapport à la variable électromagnétique. La minimisation du critère par rapport à cette variable se résume donc à la résolution d'un système linéaire grâce à la bilinéarité. De plus, cette étape est la plus coûteuse dans les méthodes décrites car la variable électromagnétique est de taille très importante par rapport à la variable d'intérêt. Lorsque la bilinéarité est perdue, le critère est plus difficile à minimiser par rapport à cette variable, ce qui risque d'entraîner un surcoût important pour la méthode. Toutefois, que la bilinéarité soit conservée ou non, cette méthode a l'important avantage



d'éviter la résolution du modèle direct. Il peut être intéressant d'étudier l'effet de la perte de la bilinéarité sur la minimisation. Il a été remarqué que la non-linéarité des critères par rapport à  $\mathbf{x}$  ne compliquait pas la minimisation. Cependant, dans le cas de  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$ , la minimisation pourrait être plus coûteuse selon la nature de la non-linéarité.

## Critère

Il a été délibérément choisi de tester les critères XF-Basique et XF-CSI et non le critère XF-MGM pour résoudre le problème de tomographie CF. Le critère XF-Basique a été proposé car il ne nécessite pas de modifications dans les équations du modèle après discrétisation par méthode des éléments finis. De plus, ce critère permet de ne faire intervenir que des matrices creuses dans les calculs de gradient et de critère. Bien que le critère XF-MGM soit également proposé au chapitre V, seul le critère XF-CSI a été développé parce qu'il est inspiré des critères CSI très employés dans la littérature sur la tomographie de diffraction. Il est ici utilisé car il sert de référence par rapport à l'existant et il permet en plus de diminuer la taille du domaine de calcul. Il pourra être intéressant de tester également le critère XF-MGM et d'étudier en détail la différence en terme de qualité de reconstruction et de convergence entre ces trois critères. Dans ce mémoire il a été montré que les différents critères étaient liés entre eux, il est fort probable que la différence entre les méthodes MGM et les méthodes CSI soient uniquement provoquées par un choix de  $\lambda$  différent.

Les *a priori* introduits dans le problème inverse prennent en compte le caractère constant par morceaux de la distribution de conductivité ainsi qu'une plage de valeurs possibles pour la conductivité relative. L'importance de ces informations en question par rapport aux données et au couplage est réglée à l'aide d'hyperparamètres. Il a été montré dans cette thèse qu'un réglage sous-optimal efficace pouvait être trouvé pour un ensemble assez important de défauts pour les méthodes XF-Basique et XF-CSI. Cependant, l'utilisation du Lagrangien augmenté permet d'améliorer les reconstructions mais également de s'affranchir du réglage de  $\lambda$ . D'autres méthodes pour calculer ce paramètre peuvent être recherchées. Bien que l'importance du réglage du coefficient de pondération de l'équation de couplage  $\lambda$  ait été particulièrement souligné dans ce mémoire, l'importance des paramètres de régularisation  $\beta$  et  $\gamma$  ne doit pas être négligée pour autant. L'étude d'une méthode de réglage automatique de ces paramètres pourra être effectuée afin d'obtenir une méthode de reconstruction non-supervisée.

Il a également été montré dans ce mémoire que l'ajout de contraintes de bornes sur les valeurs de contraste permet d'améliorer les reconstructions et de stabiliser le problème. Cependant, en profondeur, il subsiste un certain flou et les frontières entre le défaut et la matière saine ne sont pas franches. Afin d'améliorer les résultats et obtenir un défaut exactement constant par morceaux, il est envisageable d'imposer un *a priori* binaire sur le contraste (Nikolova and Mohammad-Djafari, 1996). Ceci revient à employer une *approche région*. Cet *a priori* est plus restrictif et plus difficile à gérer. Cependant, dans la littérature ce type d'approche a déjà été étudié en tomographie de diffraction. On peut notamment citer les méthodes de type *level-set* (Litman et al., 1997; Ramananjaona et al., 2001) qui peuvent être assez difficiles et coûteuses à appliquer dans notre cas. Un champ de Ising peut également être employé sur le contraste (Nikolova and Mohammad-Djafari, 1996), afin de favoriser les distributions de conductivité par blocs. Pour résoudre ce problème avec un champ de Ising, des méthodes de type *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC) peuvent être utilisées (Feron et al., 2007). Cependant, dans la continuité des méthodes proposées, il peut être plus simple de garder le schéma de minimisation alternée des critères proposés. Il est proposé dans (Dos Reis et al., 2002) d'utiliser un changement de variable permettant de faire plus ou moins tendre la variable  $\mathbf{x}$  vers la binarité en fonction d'un paramètre. Néanmoins, la binarité ne peut être exactement respectée avec cette approche. Il est alors possible d'imposer au contraste d'être strictement binaire lors de la minimisation des critères par rapport à  $\mathbf{x}$  au lieu de le contraindre à appartenir à un intervalle. Il est alors nécessaire de choisir un algorithme de minimisation sous contraintes de binarité adéquat. Le plus facile et le plus simple à mettre en œuvre est l'*iterated conditional modes* (ICM) proposé par (Besag, 1986) mais il ne permet pas d'obtenir le minimum global. Compte tenu du critère et de son mauvais conditionnement, il peut être important d'obtenir

le minimum global à chaque itération. Pour cela, une autre méthode classique est la méthode de recuit simulé (Kirkpatrick et al., 1983), malheureusement elle est très coûteuse. Compte tenu de la séparabilité du critère (Kolmogorov and Zabih, 2004), il est possible d’avoir recours à des algorithmes de minimisation globale de type Graph-cut qui peuvent se montrer très efficaces (Denis et al., 2009).

## Minimisation

La minimisation des critères XF-Basique, XF-CSI, XF-AL-Basique et XF-AL-CSI peut être également améliorée. En effet, les schémas de minimisation alternant les variables minimisées peuvent se révéler moins efficaces que d’autres schémas plus classiques. Ces méthodes de type *block-coordinate descent* (Fessler et al., 1997) sont utilisées dans les cas où la parallélisation est possible. Une alternative possible est de minimiser les critères de manière conjointe. Dans le cas de la minimisation des critères proposés, il s’agirait de minimiser simultanément par rapport à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{e}/\mathbf{w}$ . Il est possible que cette méthode de minimisation soit plus efficace. En théorie, changer l’algorithme de minimisation n’a aucun impact sur la solution mais uniquement sur le coût et le temps nécessaires pour obtenir cette solution. Le principe de minimisation simultanée peut ressembler à celui employé dans la méthode MGM de prime abord. Cependant, il faut éviter d’utiliser un schéma de minimisation comme celui de la MGM exploitant le gradient modifié comme direction de descente. En effet, cette approche ne garantit pas la décroissance du critère. Une minimisation basée sur un algorithme de gradients conjugués non-linéaires plus classique permettrait d’assurer la décroissance du critère et pourrait donc se révéler plus efficace.

De plus, les méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI permettent de minimiser le critère primal. Il existe d’autres méthodes pour minimiser ce critère. On pense notamment à la méthode de Newton-Kantorovich ou aux gradients conjugués non-linéaires. Ces algorithmes nécessitent la résolution du modèle direct pour chaque position du capteur pour calculer le gradient ou la Hessienne du critère. Cette dernière opération est toujours très coûteuse notamment pour des systèmes de grande taille. A notre connaissance, il n’existe aucune comparaison entre les méthodes de type MGM/CSI et les méthodes de type Newton-Kantorovich en termes de résultats, de coûts de calcul, d’espace mémoire nécessaire, de temps, etc. Il peut donc être intéressant de comparer les méthodes XF-AL-Basique et XF-AL-CSI avec ces autres méthodes pour des problèmes de grande taille. En effet, plus le problème est grand et plus la résolution du modèle direct risque d’être coûteuse. Les critères XF-AL-Basique et XF-AL-CSI ne nécessitent pas ces résolutions coûteuses, ce qui accentue leur intérêt pour des problèmes importants. Cependant, il est difficile de conclure de manière sûre tant que ces comparaisons n’auront pas été effectuées.

Au-delà des algorithmes d’optimisation utilisés pour minimiser le critère, plusieurs constats peuvent être formulés. Tout d’abord, l’étape la plus coûteuse en temps de calcul et opérations est l’étape de minimisation par rapport au champ électrique  $\mathbf{e}$  ou aux sources de contraste  $\mathbf{w}$ . De plus, cette étape de minimisation pour une position du capteur est indépendante des autres positions. Cette étape de minimisation peut donc être parallélisée avec autant de processeurs que de positions de capteur afin de diminuer de manière importante le temps de calcul. En outre, étudier le préconditionnement du problème peut permettre de diminuer le nombre d’opérations nécessaires. Il semble que dans le critère XF-CSI, l’intervention de la matrice  $\mathbf{A}_0^{-1}$  améliore le conditionnement du critère permettant d’accélérer la convergence de chaque minimisation par rapport à  $\mathbf{w}$ . Il peut être intéressant de voir s’il est possible d’adapter ce préconditionnement au cas XF-Basique. De plus, afin d’accélérer la convergence de la méthode de minimisation principale, la sur-relaxation est introduite dans (Barrière et al., 2009) ; il est possible que, dans notre cas, cette technique assez simple, permette de diminuer le nombre d’itérations CSI nécessaires pour la convergence.

## Inversion 3D

Une des étapes envisagées pour la suite est le passage à une modélisation 3D. De nombreux problèmes risquent de se poser en termes de modélisation mais également de mémoire, de coût de calcul et de mise en œuvre. D'un point de vue modélisation, il va être nécessaire de passer des EF nodaux aux EF avec éléments d'arête pour pouvoir prendre en compte les discontinuités de champ. Ceci ne complique pas de manière significative l'inversion. Au chapitre V, les critères XF-Basique et XF-CSI ont été comparés en terme de mémoire et de coût calculatoire quelle que soit la modélisation choisie ou le cadre adopté (2D ou 3D). Même si le critère XF-CSI permet de diminuer le nombre d'inconnues électromagnétiques (des vecteurs  $\mathbf{w}$ ) à calculer par rapport au critère XF-Basique, il nécessite de garder en mémoire des matrices moins creuses que celles employées par le critère XF-Basique. Ceci se traduit par un coût de calcul plus élevé lors de la résolution des systèmes linéaires correspondants pour les cas difficiles. Le critère XF-CSI est donc plus coûteux à minimiser que le critère XF-Basique.

En termes de mise en œuvre, les critères XF-CSI et XF-MGM ne nécessitent pas de modéliser explicitement la bobine mais uniquement de connaître le champ incident, ce qui est un avantage important par rapport à l'approche Basique. Néanmoins, il reste possible d'introduire l'excitation de la bobine par le champ incident dans le critère XF-Basique de manière approximative. Cependant, la qualité de l'approximation risque de dépendre de la finesse du maillage. Ces observations en termes de coût calculatoire et de temps de calcul ont été effectuées en 2D, des tests doivent être effectués en 3D pour pouvoir confirmer ou infirmer ces constats. Il est difficile de conclure *a priori* sur le critère à utiliser pour l'inversion 3D à cause des problèmes de coût de calcul, de mémoire et de mise en œuvre qui se posent pour chacun des critères. Toutefois, en 3D la bande de la matrice creuse peut être plus importante. En effet, le nombre d'éléments reliés entre eux est plus élevé et il est plus difficile de trouver un ordre de numérotation des degrés de liberté permettant d'avoir la bande la plus serrée possible. Ceci montre que restreindre le domaine de calcul à une zone d'intérêt n'apporte pas nécessairement une diminution de la mémoire totale requise pour résoudre le problème. De même il peut être intéressant de tester le critère XF-MGM en 2D pour évaluer les trois critères avant de commencer l'inversion 3D.

Afin d'essayer de diminuer le coût calculatoire et de mémoire nécessaire pour résoudre le problème, il est envisagé d'employer la méthode de condensation statique (Thomas, 2006) et serait utilisée dans le cas du critère XF-Basique. Elle permet de limiter les calculs de champ électromagnétique à une zone d'intérêt. Cependant, elle nécessite l'inversion d'une matrice, ce qui peut limiter son efficacité numérique. Il est difficile *a priori* d'évaluer le gain de cette méthode qui dépendra du nombre d'éléments nécessaires pour discrétiser le domaine de calcul et le nombre d'éléments de la zone d'intérêt. Une autre méthode exploitable pour diminuer le coût calculatoire est la méthode de perturbation (Dular et al., 2006; Sabariego and Dular, 2007). Cette méthode permet de diviser la zone de calcul en deux : une zone importante où le calcul n'est effectué qu'une seule fois ; une zone d'intérêt plus petite contenant le défaut.

Le passage à une reconstruction en 3D est envisagé dans le but d'inverser des données réelles. L'inversion de données réelles est toujours délicate à cause du bruit de mesure et des erreurs du modèle direct. Obtenir un modèle direct suffisamment fiable et proche de la réalité pour l'inversion risque d'être la principale difficulté. De plus, dans ce mémoire seules des entailles sont reconstruites et les données réelles à disposition ont été acquises sur des entailles électroérochées pour être connues précisément. Or les défauts réels ne ressemblent pas nécessairement à de telles entailles, ce qui peut affecter le comportement de la méthode d'inversion. Celle-ci devra donc être caractérisée avec soin, à l'aide de données proches de celles correspondant à l'application visée.

# Annexes



## Annexe A

# Ensemble d'apprentissage de la RI pour la méthode EDF-EPM

On utilise l'ensemble d'apprentissage suivant :

1. un défaut carré de 1 mm de largeur et 1 mm de profondeur ;
2. un défaut profond de 4 mm de largeur et 3 mm de profondeur ;
3. un défaut de 5 mm de largeur et de 1 mm de profondeur ;
4. un défaut transverse de 0.6 mm de largeur et de 1.4 mm de profondeur.

Les défauts ainsi que les données simulées par COMSOL sont présentés.

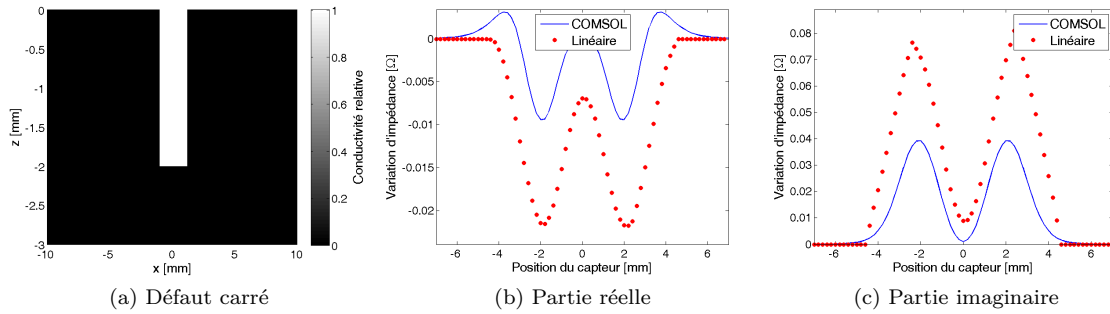


FIG. A.1 – Défaut et données simulées pour un défaut carré

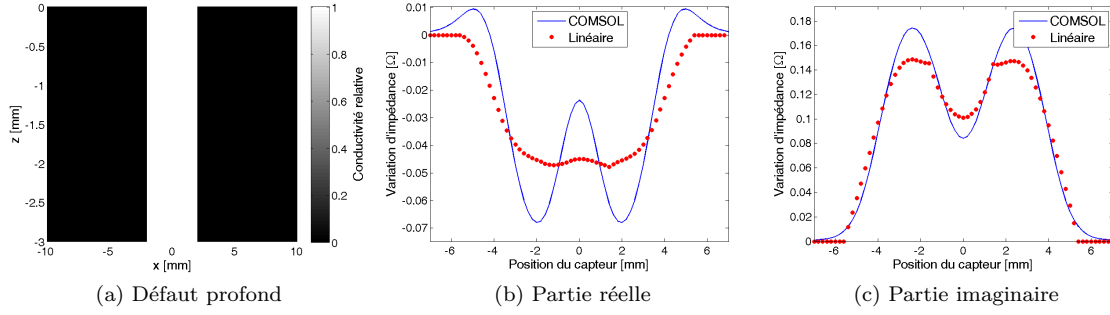


FIG. A.2 – Défaut et données simulées pour un défaut profond

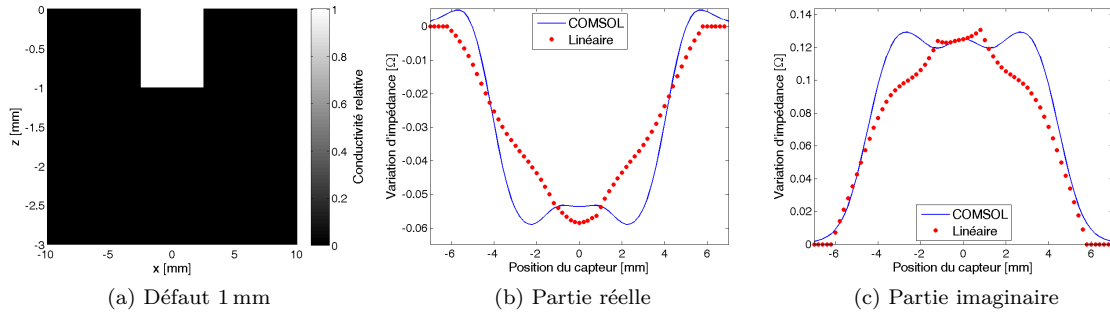


FIG. A.3 – Défaut et données simulées pour un défaut de 1 mm

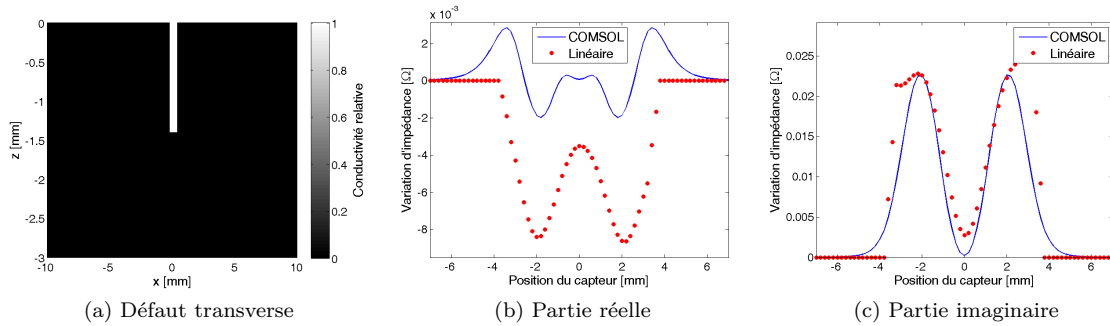


FIG. A.4 – Défaut et données simulées pour un défaut transverse de 1.4 mm

## Annexe B

# Configurations des simulations

### B.1 Paramètres

conductivité électrique $\sigma_0$	$1,39 \times 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
perméabilité magnétique $\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

TAB. B.1 – Paramètres

### B.2 Capteur simulé

rayon intérieur	1 mm
rayon extérieur	3 mm
hauteur	1 mm
intensité $I_0$	1 A
fréquence	300 kHz
entrefer	0,2 mm
pas de capteur	0,2 mm
nombre de positions	71

TAB. B.2 – Capteur



### B.3 Domaine de calcul

hauteur	6 cm
largeur	10 cm
épaisseur plaque	1 cm
hauteur domaine intérêt	5 mm

TAB. B.3 – Domaine de calcul

## Annexe C

# Courte introduction aux EF

### C.1 Principe de la méthode des éléments finis

Afin d'expliquer le principe de la méthode des *éléments finis* (EF), on tente de conserver une certaine généralité. On se base sur les documents de référence (Fortin and Garon, 2011; Silvester and Ferrari, 1996). Contrairement à la méthode par différences finies, qui utilise une formulation forte sur un nombre fini de points de l'espace, la méthode des éléments finis utilise une forme faible sur un domaine  $\Omega$  délimité par  $\Gamma$ . Elle permet de résoudre le problème sur un domaine continu et non sur un domaine discret en utilisant des fonctions d'interpolation. L'espace est discrétisé en éléments, on appelle  $\Omega^k$  la restriction de l'espace  $\Omega$  à l'élément  $k$ .

On prend un exemple simple, classique et proche de celui que l'on cherchera à résoudre le problème de modélisation CF afin d'expliquer le principe de la méthode. On se limite au cas 1D pour le moment. On considère que l'on cherche à résoudre l'équation :

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0, & \forall x \in \Gamma \end{cases}$$

Par simplicité, on fait l'hypothèse que  $f(x) \in L^2(\Omega)$  i.e.,  $f(x)$  est de carré intégrable sur son support  $\Omega$ , où  $\Omega$  est le domaine de calcul délimité par la frontière  $\Gamma$ . On a imposé que les valeurs de  $u(x)$  à sa frontière  $\Gamma$  soient nulles : ce sont les conditions de Dirichlet homogène.

On cherche à résoudre une équation différentielle d'ordre 2 en 1D avec des conditions de Dirichlet homogène. On cherche à calculer  $u(x) \in H_0^1(\Omega)$  avec  $H_0^1(\Omega)$  un espace de Sobolev :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \vec{\nabla} u \in (L^2(\Omega))^3, u(x) = 0 \forall x \in \Gamma \right\}$$

On multiplie l'équation différentielle par la fonction test  $w(x) \in H_0^1(\Omega)$  et on intègre sur  $\Omega$  afin d'obtenir la forme faible ou formulation variationnelle de l'équation différentielle :

$$\int_{\Omega} u''(x) w(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(x) w(x) \, d\Omega$$

Après intégration par parties, on trouve :

$$-\int_{\Omega} u'(x) w'(x) \, d\Omega + [u'(x) w(x)]_{\Gamma} = \int_{\Omega} f(x) w(x) \, d\Omega$$

De manière générale, quelle que soit l'équation différentielle linéaire que l'on cherche à résoudre, on obtient une équation bilinéaire par rapport à  $u$  et à  $w$  :

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

De plus, on munit l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  du produit scalaire suivant et de la norme associée à ce produit scalaire :

$$(u, w)_H = \int_{\Omega} u w \, d\Omega + \int_{\Omega} u' w' \, d\Omega$$

$$\|u\|_H^2 = \int_{\Omega} (u^2 + u'^2) \, d\Omega$$

L'espace de Sobolev muni du produit scalaire et de la norme associée est un espace de Hilbert.

On peut démontrer que résoudre ce problème est équivalent à minimiser une fonctionnelle énergie  $\mathcal{J}(u)$  si la forme bilinéaire  $a(u, w)$  est symétrique :

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'(x))^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} f(x) u(x) \, d\Omega$$

On pose quelques définitions :

**Définition C.1** *Cœrcivité*

Une forme bilinéaire  $a(u, w)$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dite cœrcive s'il existe une constante  $C_1 \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$a(u, u) \geq C_1 \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H$$

**Définition C.2** *Continuité*

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire  $a(u, w)$  de  $H \times H$  est dite continue s'il existe une constante  $C_2 \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$|a(u, w)| \leq C_2 \|u\|_H \|w\|_H, \quad \forall (u, w) \in H \times H$$

On énonce le théorème de Lax-Milgram permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution au problème sous réserve de respecter certaines hypothèses :

**Théorème C.1.1** *Théorème de Lax-Milgram*

Soient :

1.  $H$  un espace de Hilbert ;
2.  $a(u, w)$  une forme bilinéaire continue sur  $H \times H$  ;
3.  $l(w)$  une forme linéaire continue sur  $H$ .

Si  $a(u, w)$  est cœrcive, alors il existe une unique solution  $u \in H$  telle que :

$$a(u, w) = l(w), \quad \forall w \in H$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique à ce problème variationnel si les hypothèses de continuité et de cœrcivité sont respectées. C'est pourquoi on introduit un produit scalaire à l'espace de Sobolev afin d'obtenir un espace de Hilbert qui respecte les conditions du théorème de Lax-Milgram. La continuité et la cœrcivité sont faciles à démontrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (Fortin and Garon, 2011) pour le problème à résoudre.

Le problème variationnel obtenu est encore sous forme continue. On cherche à discrétiser ce problème afin de pouvoir le résoudre numériquement. On discrétise l'espace en le maillant et en introduisant les éléments. On se place pour le moment uniquement dans le cas d'un élément  $k$ . L'idée est de projeter la fonction  $u(x)$  sur une base de fonctions  $\{\phi_i(x)\}_{i=1, \dots, N_d}$  qui respectent les hypothèses du théorème de Lax-Milgram : c'est la *méthode de Ritz*.

$$u(x) \approx u_d(x) = \sum_{j=1}^{N_d} u_j \phi_j(x)$$

On obtient une équation bilinéaire discrétisée :

$$a(u_d, w_d) = l(w_d), \quad \forall w_d \in H_{0d}^1(\Omega)$$

où  $H_{0d}^1(\Omega)$  est un sous-espace de  $H_0^1(\Omega)$  formé de toutes les combinaisons linéaires des fonctions  $\phi_i(x)$ .

Il reste à choisir  $w_d$ . Un choix très utilisé est d'imposer  $w_d = \phi_i$  pour les  $N_d$  degrés de liberté : c'est la *méthode de Galerkin*. L'objectif est d'obtenir un système inversible avec autant d'inconnues que d'équations.

On obtient un système élémentaire pour l'élément  $k$  de  $N_d$  équations à  $N_d$  inconnues  $\{u_j\}$  :

$$\sum_{j=1}^{N_d} u_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i), \quad 1 \leq i \leq N_d$$

On obtient une équation matricielle de la forme  $\mathbf{A}^k \mathbf{u}^k = \mathbf{f}^k$  avec

$$\mathbf{A}^k(j, i) = a(\phi_j, \phi_i)$$

$$\mathbf{u}^{kt} = (u_1 \mid u_2 \mid \cdots \mid u_{N_d})$$

$$\mathbf{f}^k(i) = l(\phi_i)$$

On applique le principe précédent à tous les éléments et on construit un système  $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}$  englobant tous les nœuds.

Le principe de la méthode est généralisable à des espaces de dimension supérieure, ce que l'on fera par la suite en 2D et 3D dans le cas des courants de Foucault.

La difficulté de la méthode par éléments finis réside dans le choix des fonctions  $\{\phi_i(x)\}$ .

## C.2 Formulation faible dans le cas des CF

On utilise les mêmes notations qu'au chapitre III. Afin de développer le modèle direct, on utilise l'équation d'Helmholtz vérifiée dans notre cas :

$$\nabla \cdot \nabla E(x, z) - q\sigma(x, z) E(x, z) = qJ(x, z)$$

$$J(x, z) = \begin{cases} \pm J_c & \text{si } (x, z) \in D_\ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$q = j\omega\mu_0$$

On rappelle que  $J_c$  est la densité du courant à la bobine. On impose à la densité de courant d'être constante dans la bobine, ceci équivaut à négliger l'effet de peau, valable compte tenu des dimensions de la bobine. En effet, la section et le rayon de la bobine sont de l'ordre du millimètre. De plus  $J(x, z) \in L^2(\Omega)$ .

En introduisant le contraste  $c(x, z)$ , on obtient :

$$\frac{1}{\sigma_0} \nabla \cdot \nabla E(x, z) + qc(x, z) E(x, z) - qE(x, z) = \frac{q}{\sigma_0} J(x, z)$$

$$c(x, z) = \frac{\sigma_0 - \sigma(x, z)}{\sigma_0}$$

La méthode des éléments finis est basée sur la résolution de la forme faible de l'équation différentielle à résoudre (Silvester and Ferrari, 1996). On réutilise les notations introduites à la section précédente, on trouve dans le cas de l'équation d'Helmholtz la formulation faible suivante :

$$\frac{1}{\sigma_0} \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla E(x, z) w(x, z) \, d\Omega + \int_{\Omega} q(c(x, z) - 1) E(x, z) w(x, z) \, d\Omega = \frac{q}{\sigma_0} \int_{\Omega} J(x, z) \, d\Omega \quad (\text{C.1})$$

D'après le théorème de la divergence *i.e.*, l'identité de Green, le premier terme de (IV.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0} \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla E(x, z) w(x, z) \, d\Omega &= \frac{1}{\sigma_0} \int_{\Gamma} w(x, z) \nabla E(x, z) \cdot n(x, z) \, d\Gamma \\ &\quad - \frac{1}{\sigma_0} \int_{\Omega} \nabla E(x, z) \cdot \nabla w(x, z) \, d\Omega \end{aligned}$$

On appelle  $\Gamma$  la frontière du domaine de calcul  $\Omega$  et  $n(x, z)$  la normale à  $\Gamma$ .

On utilise les conditions de Dirichlet homogène *i.e.*,  $E(x, z) = 0, \forall (x, z) \in \Gamma$ .

On a imposé  $E \in H_0^1(\Omega)$ , on impose également  $w(x, z) \in H_0^1(\Omega)$  *i.e.*,  $w(x, z) = 0, \forall (x, z) \in \Gamma$ , l'intégrale sur  $\Gamma$  disparaît donc.

On garde en mémoire pour la suite que les variables dépendent de  $(x, z)$  et on cesse de le noter dans les équations pour alléger l'écriture. Le problème obtenu est toujours continu, il est nécessaire de le discrétiser pour pouvoir le résoudre numériquement.

### C.3 Calculs avec l'élément de référence

Pour calculer les termes intervenant dans les intégrales, on introduit l'élément de référence (cf. figure C.1). Ceci revient à changer de base afin de faciliter les calculs des intégrales.

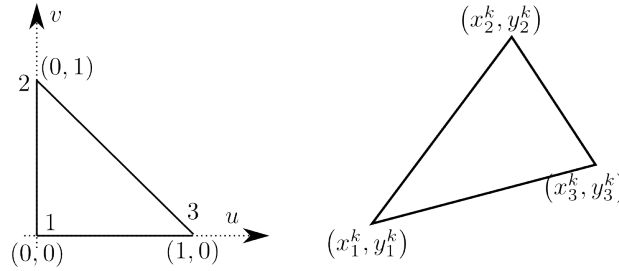


FIG. C.1 – Transformation  $T^k$

On utilise une transformation géométrique permettant de passer de la base de l'élément de référence  $\hat{k}$  dont les variables sont  $(u, v)$  à la base du nœud  $i$  de l'élément  $k$  de position  $(x_i^k, z_i^k)$  dont les variables sont  $(x, z)$ . On définit la transformation  $T^k$  pour passer de l'élément de référence  $\hat{k}$  à l'élément  $k$  :

$$\begin{aligned} T^k : \quad \hat{k} &\rightarrow k \\ (u, v) &\rightarrow (x, z) \end{aligned}$$

On appelle  $\tilde{\phi}(u, v)$  la fonction d'interpolation dans la base de référence liée à l'élément de référence :

$$\phi^k(x, z) = \phi^k(T^k(u, v)) = \tilde{\phi}(u, v)$$

On a donc en posant  $\hat{\Omega}^k$  le domaine de l'élément de référence  $\hat{k}$  :

$$\int_{\Omega^k} \phi_i^k \phi_j^k \, d\Omega^k = \int_{\hat{\Omega}^k} \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_j \mathcal{J}^k \, d\hat{\Omega}^k$$

$$\int_{\Omega^k} \nabla \phi_i^k \cdot \nabla \phi_j^k \, d\Omega^k = \int_{\hat{\Omega}^k} \nabla \tilde{\phi}_i^t (\mathbf{B}^k)^t \mathbf{B}^k \nabla \tilde{\phi}_j \mathcal{J}^k \, d\hat{\Omega}^k$$

avec  $\mathbf{D}T^k$  la matrice jacobienne de  $T^k$ ,  $\mathcal{J}^k$  le jacobien de la transformation  $T^k$  *i.e.*,  $\mathcal{J}^k = |\mathbf{D}T^k|$  et  $\mathbf{B}^k = (\mathbf{D}T^k)^{-t}$ . Dans notre cas  $\mathcal{J}^k = 2A^k$ , où  $A^k$  est l'aire de l'élément  $k$ .

En utilisant l'interpolation de Lagrange pour les fonctions base et donc les fonctions test (on utilise la méthode de Galerkin) on trouve :

$$\phi_i(u, v) = \begin{cases} 1 - u - v & \text{si } i = 1 \\ u & \text{si } i = 2 \\ v & \text{si } i = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = T^k(u, v) = \begin{pmatrix} (1 - u - v)x_1^k + ux_2^k + vx_3^k \\ (1 - u - v)z_1^k + uz_2^k + vz_3^k \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne de la transformation  $T^k$  est :

$$DT^k = \begin{pmatrix} x_2^k - x_1^k & x_3^k - x_1^k \\ z_2^k - z_1^k & z_3^k - z_1^k \end{pmatrix}$$

$$B^k = (DT^k)^{-t} = \frac{1}{\mathcal{J}^k} \begin{pmatrix} z_3^k - z_1^k & z_1^k - z_2^k \\ x_1^k - x_3^k & x_2^k - x_1^k \end{pmatrix}$$

L'utilisation de l'élément de référence permet d'éviter le calcul des intégrales pour chaque élément et de tout simplifier en un simple calcul d'aire à effectuer pour chaque élément.

## C.4 Estimation d'erreur

Un des principaux avantages de la méthode des éléments finis est la possibilité de pouvoir s'assurer de la convergence de la solution approchée  $u_d$  vers la solution exacte  $u$  lorsque le maillage est de plus en plus fin. En effet, si on appelle

$$h = \max_{k \in [1, N_n]} (h^k)$$

avec  $h^k$  la plus grande distance entre 2 points de l'élément  $k$ , on sait que la solution numérique converge vers la solution exacte au sens de la norme de l'espace de Hilbert  $H$  considéré (Ciarlet, 1978; Fortin and Garon, 2011) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_d\|_H = 0$$

De même, à partir d'un théorème plus général sur l'ordre de convergence en fonction de la taille du maillage, on peut obtenir le lemme suivant (Ciarlet, 1978; Fortin and Garon, 2011) :

### Lemme C.4.1 Ordre de convergence

*Si la solution exacte  $u$  du problème est suffisamment régulière et si la fonction d'interpolation est un polynôme de degré  $p$  alors il existe une constante  $C$  dépendante de  $u$  :*

$$\|u - u_d\|_{H^1(\Omega)} \leq C(u) h^p$$

On peut remarquer qu'en pratique le lemme précédent est inutilisable. En effet, il dépend de constantes inconnues et fait intervenir la solution  $u$  inconnue. On appelle donc ce calcul une estimation d'erreur *a priori*. Ce lemme est intéressant pour avoir un ordre de convergence en fonction du pas de discrétisation et de l'ordre du polynôme.

Il existe d'autres estimations d'erreur dites *a posteriori* (Ainsworth and Oden, 1997) permettant d'estimer l'erreur de calcul en fonction de la solution calculée et même d'obtenir une cartographie de l'erreur. Ces résultats sont utilisés pour le raffinement de maillage. En effet, le raffinement de maillage considère à modifier le maillage aux nœuds où l'erreur de la solution estimée est la plus forte à l'aide des calculs d'erreur *a posteriori*. On n'explicite pas les calculs d'erreur *a posteriori*, l'objectif étant de préciser qu'il est possible d'avoir une idée de l'erreur locale des champs calculés avec les éléments finis. A notre connaissance, il n'existe pas de tels résultats pour l'estimation locale d'erreur par la méthode DF. Il existe uniquement des résultats sur une estimation d'erreur globale.



## Annexe D

# Algorithmes de gradients conjugués

### D.1 Généralités

On cherche à minimiser  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Si la fonction  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  est coercive, alors il existe au moins un minimum à  $\mathcal{J}(\mathbf{x})$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un algorithme de minimisation construit une suite de  $\mathbf{x}^{(n)}$  de manière itérative. Bien qu'il existe des algorithmes minimisation globale plus compliqués à mettre en œuvre, on se limite aux méthode de minimisation locale :

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha^{(n)} \mathbf{d}^{(n)}$$

où  $\mathbf{d}^{(n)}$  est une direction de descente et  $\alpha^{(n)}$  un pas dans la direction de descente. Afin d'assurer la décroissance du critère, il est nécessaire que  $\mathbf{d}^{(n)}$  respecte la condition  $(\mathbf{d}^{(n)})^t \nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}^{(n)}) < 0$ .

La difficulté et les différences entre les méthodes de minimisation existantes résident dans le choix de  $\mathbf{d}^{(n)}$  et de  $\alpha^{(n)}$ .

### D.2 GC linéaire avec préconditionnement

On explicite l'algorithme des gradients conjugués linéaires avec préconditionnement pour résoudre le système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Lorsqu'il n'y a pas de préconditionnement, il suffit de poser  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , dans ce cas, cet algorithme est applicable pour des systèmes complexes, à moins que  $\mathbf{P}$  soit une matrice ne contenant que des termes réels.

### D.3 GC non-linéaire

La minimisation de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\mathbf{x}$  devient alors plus compliquée puisque le critère à minimiser n'est plus une forme quadratique par rapport à  $\mathbf{x}$ . On propose d'utiliser un algorithme de minimisation de type gradients conjugués non linéaire (Fessler and Booth, 1999). On calcule le gradient du critère :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_x(\mathbf{x}) = 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}^x + \beta \mathbf{D}^t \psi'(\mathbf{D}_k \mathbf{x}; \delta) + \gamma \psi'(\mathbf{x}; \delta)$$

On a toujours la fonction :

$$\psi(u) = \sqrt{u^2 + \delta^2}$$



**Entrées :** –  $\mathbf{A}$  le Hessien ;  
 –  $\mathbf{b}$  ;  
 –  $\mathbf{x}^{(0)}$  la solution initiale ;  
 –  $\mathbf{P}$  la matrice de préconditionnement.

**Sorties :**  $\mathbf{x}$  la solution.

$$\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{g}^{(0)}$$

$$\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}$$

$$n \leftarrow 0$$

**répéter**

$$\alpha^{(n)} = \frac{(\mathbf{g}^{(n)})^t \mathbf{z}^{(n)}}{(\mathbf{A}\mathbf{p}^{(n)})^t \mathbf{p}^{(n)}}$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \alpha^{(n)} \mathbf{p}^{(n)}$$

$$\mathbf{g}^{(n+1)} = \mathbf{g}^{(n)} - \alpha^{(n)} \mathbf{A}\mathbf{p}^{(n)}$$

$$\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{g}^{(n+1)}$$

$$\beta^{(n+1)} = \frac{(\mathbf{g}^{(n+1)})^t \mathbf{z}^{(n+1)}}{(\mathbf{g}^{(n)})^t \mathbf{z}^{(n)}}$$

$$\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{z}^{(n+1)} + \beta^{(n+1)} \mathbf{p}^{(n)}$$

$$n \leftarrow n + 1$$

**jusqu'à** Convergence

Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. D.1 – Gradients conjugués linéaire avec préconditionnement

**Entrées :**  $\mathbf{x}^{(0)}$  la solution initiale

**Sorties :**  $\mathbf{x}$  la variable inconnue

Initialisation de l'algorithme :  $n \leftarrow 1$  ;

**répéter**

$$\mathbf{g}^{(n)} = -\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}^{(n-1)}) ;$$

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{P}\mathbf{g}^{(n)} \text{ avec } \mathbf{P} \text{ la matrice de préconditionnement}$$

$$\gamma^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{(\mathbf{g}^{(n)} - \mathbf{g}^{(n-1)})^t \mathbf{p}^{(n)}}{(\mathbf{g}^{(n-1)})^t \mathbf{p}^{(n-1)}} & \text{si } n > 0 \end{cases} ;$$

$$\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n)} + \gamma^{(n)} \mathbf{d}^{(n-1)} \text{ la direction de descente ;}$$

$$\hat{\alpha}^{(n)} = \arg \min_{\alpha} \mathcal{J}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}) = \arg \min_{\alpha} f_{\mathbf{x}}(\alpha) ;$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \hat{\alpha}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} \text{ la nouvelle solution ;}$$

$$n \leftarrow n + 1 ;$$

**jusqu'à** Convergence

Retourner  $\mathbf{x}$ .

TAB. D.2 – Algorithme de GC non linéaire

La seule réelle différence avec la régularisation de Tikhonov, pour laquelle on peut utiliser un algorithme de gradients conjugués linéaire, est le calcul du pas de descente  $\alpha$ .

En effet, on ne dispose pas dans le cas de  $\mathbf{x}$  d'une solution explicite de  $f'_{\mathbf{x}}(\alpha) = 0$ , on utilise la méthode proposée dans (Fessler and Booth, 1999) et utilisée dans (Goussard and Guichard, 2007), à savoir employer une méthode de Newton-Raphson pour minimiser  $f_{\mathbf{x}}(\alpha)$ . Cette procédure itérative est définie par :

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i - \frac{f'_{\mathbf{x}}(\alpha_i)}{f''_{\mathbf{x}}(\alpha_i)}$$

$$f_{\mathbf{x}}(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \beta\psi(\mathbf{D}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}); \delta) + \gamma\psi(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}; \delta)$$

$$f'_{\mathbf{x}}(\alpha) = a_1 + 2a_2\alpha + \beta (\mathbf{D}\mathbf{d})^t \psi'(\mathbf{D}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}); \delta) + \gamma \mathbf{d}^t \psi'(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d})$$

$$f''_{\mathbf{x}}(\alpha) = 2a_2 + \beta \left( (\mathbf{D}\mathbf{d})^2 \right)^t \psi''(\mathbf{D}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}); \delta) + \gamma (\mathbf{d}^2)^t \psi''(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}; \delta)$$

Pour exprimer les valeurs des coefficients  $a_1$  et  $a_2$ , on réutilise les expressions utilisées pour simplifier les termes du critère.

$$a_1 = 2v_{11} - 2\mathbf{d}^t \sum_l \left[ (\mathbf{q}_\ell^r)^t s_\ell^r + (\mathbf{q}_\ell^i)^t s_\ell^i \right] + 2\lambda v_{21} + 2\lambda \mathbf{d}^t \sum_l \left[ (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{n}_\ell^i + (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{n}_\ell^r \right]$$

$$a_2 = v_{12} + \lambda v_{22}$$

Avec :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{d}^t \sum_l \left( (\mathbf{q}_\ell^r)^t \mathbf{q}_\ell^r + (\mathbf{q}_\ell^i)^t \mathbf{q}_\ell^i \right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{d}^t \sum_l \left( (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{Q}_\ell^r + (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{Q}_\ell^i \right)$$

$$v_{11} = \mathbf{u}_1 \mathbf{x} \quad v_{12} = \mathbf{u}_1 \mathbf{d} \tag{D.1}$$

$$v_{21} = \mathbf{u}_2 \mathbf{x} \quad v_{22} = \mathbf{u}_2 \mathbf{d} \tag{D.2}$$

On ne calcule pas  $a_0$ , puisque ce coefficient n'intervient pas dans la procédure itérative. On considère que la procédure itérative a convergé lorsque la variation relative entre 2 valeurs successives de  $\alpha$  est inférieure à un seuil (ici 1%) *i.e.*,

$$|\alpha_{i+1} - \alpha_i| \leq 10^{-2} |\alpha_i|$$

Pour certaines valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$ , l'estimation de  $\alpha$  par Newton-Raphson est instable, les valeurs de  $\alpha$  oscillent fortement, pouvant donner des valeurs négatives. On choisit d'approcher le calcul de la dérivée seconde de  $f(\alpha)$  (Fessler and Booth, 1999; Goussard and Guichard, 2007) :

$$\psi''(u) \approx \frac{\psi'(u)}{u}$$

La procédure devient une procédure de Newton-Raphson modifiée et semble éliminer ces oscillations. Si ces problèmes venaient à se reproduire, on pourrait étudier l'utilisation d'autres algorithmes de minimisation (Labat, 2006).



## Annexe E

# Calculs pour les critères XF

### E.1 Rappels

On rappelle les équations d'observation et de couplage pour la tomographie par CF :

$$\Delta Z_\ell = \frac{\sigma_0}{q} e_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) \mathbf{e}_\ell \quad (\text{E.1})$$

$$\mathbf{M} \mathbf{e}_\ell + \mathbf{K}_x \mathbf{e}_\ell = \mathbf{f}_\ell \quad (\text{E.2})$$

On tente d'introduire les courants de contraste afin d'approcher les méthodes CSI actuelles.

### E.2 XF-MGM, XF-CSI et XF-Basique

Au chapitre V, on propose différents critères à minimiser plus ou moins inspirés des critères MGM et CSI en utilisant les équations d'observation (E.1) et de couplage (E.2). Le critère XF-Basique est basé sur les erreurs quadratiques de ces équations.

Afin d'obtenir un critère plus proche des critères MGM (Kleinman and van den Berg, 1993) et CSI (van den Berg and Kleinman, 1997), il faut modifier les équations. Pour s'approcher du critère CSI, il est nécessaire de faire intervenir une quantité  $\mathbf{w}_\ell = (\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_{x0}) \mathbf{e}_\ell$ . Si on observe les équations E.1 et E.2, on observe qu'il est possible d'obtenir un critère qui ne dépende que de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{w}$ , après avoir prémultiplié l'équation de couplage E.2 par  $(\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_{x0})$ . On considère le cas sans défaut :

$$\mathbf{M} \mathbf{e}_{0\ell} + \mathbf{K}_{x0} \mathbf{e}_{0\ell} = \mathbf{f}_\ell \quad (\text{E.3})$$

Pour mémoire, on développe les calculs en commençant par faire la différence entre les deux équations (E.2) et (E.3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} (\mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell}) + \mathbf{K}_x \mathbf{e}_\ell - \mathbf{K}_{x0} \mathbf{e}_{0\ell} &= 0 \\ (\mathbf{M} + \mathbf{K}_{x0}) (\mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell}) + (\mathbf{K}_x - \mathbf{K}_{x0}) \mathbf{e}_\ell &= 0 \end{aligned}$$

On pose :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{M} + \mathbf{K}_{x0}$$

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{K}_x - \mathbf{K}_{x0}$$

On a donc :

$$\mathbf{e}_\ell - \mathbf{e}_{0\ell} + \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{e}_\ell = 0$$

On prémultiplie par  $\mathbf{C}_x$  pour obtenir une vraie CSI, sinon on obtient la formulation par MGM. On se restreint à une zone dans une partie de la plaque *i.e.*, on ne prend pas en compte l'air

et ni une zone en profondeur. Finalement on obtient les erreurs quadratiques sur les équations d'observation et de couplage :

$$J_1 = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} + \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{w}_{\ell} \right\|^2$$

$$J_2 = \sum_{\ell} \left\| \mathbf{w}_{\ell} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_{\ell} - \mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell} \right\|^2$$

Le critère XF-MGM est donc :

$$\mathcal{J}_{\text{MGM}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} + \frac{\sigma_0}{q} \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_{\ell} \right\|^2 + \lambda_{\text{MGM}} \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{e}}_{\ell} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_{\ell} - \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2$$

Le critère XF-CSI est donc :

$$\mathcal{J}_{\text{CSI}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} + \frac{\sigma_0}{q} \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell}^t \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} \right\|^2 + \lambda_{\text{CSI}} \sum_{\ell} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} + \tilde{\mathbf{C}}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{w}}_{\ell} - \tilde{\mathbf{C}}_x \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \right\|^2$$

Le critère XF-Basique proposé est :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{e}; \lambda) = \sum_{\ell} \left\| \Delta Z_{\ell} - \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) \mathbf{e}_{\ell} \right\|^2 + \lambda \left\| \mathbf{M} \mathbf{e}_{\ell} + \mathbf{K}_x \mathbf{e}_{\ell} - \mathbf{f}_{\ell} \right\|^2$$

La méthode CSI classique fait intervenir le calcul de  $\lambda_{\text{CSI}}$  qui est basé sur le rapport des équations d'observation et de couplage lorsqu'il n'y a pas de courant de contraste. Dans notre cas, on a :

$$\lambda_{\text{CSI}} = \frac{\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2}{\sum_{\ell} \|\mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell}\|^2}$$

De même, la méthode MGM se base sur le même principe pour obtenir le calcul suivant pour  $\lambda_{\text{MGM}}$  :

$$\lambda_{\text{MGM}} = \frac{\sum_{\ell} \|\Delta Z_{\ell}\|^2}{\sum_{\ell} \|\mathbf{e}_{0\ell}\|^2}$$

## Annexe F

# Calculs pour la minimisation

Les matrices  $\mathbf{H}_e$  et  $\mathbf{H}_x$  utilisées respectivement dans les équations (VI.1) et (VI.2) sont introduites ainsi que les vecteurs  $\mathbf{b}_e$  et  $\mathbf{b}_x$ . On ne tient pas compte des scalaires  $c_e$  et  $c_x$  car ils n'interviennent pas dans la minimisation du critère.

Dans la suite, lorsque des exposants  $\cdot^r$  et  $\cdot^i$  sont utilisés, il s'agit respectivement de la partie réelle et de la partie imaginaire.

### F.1 XF-Basique

#### F.1.1 Minimisation par rapport à $e$

La minimisation par rapport à  $e_\ell$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $e_\ell$   $\nabla_e \mathcal{J}$  :

$$\nabla_e \mathcal{J} = 2\mathbf{H}_e \mathbf{e}_\ell - 2\mathbf{b}_e$$

$$\mathbf{H}_e = (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x)^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) + \lambda (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x)^\dagger (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x) \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n}$$

$$\mathbf{b}_e = (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x)^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_\ell + \lambda (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x)^\dagger \mathbf{f}_\ell \in \mathbb{C}^{N_n}$$

#### F.1.2 Minimisation par rapport à $x$

La minimisation par rapport à  $x$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $x$   $\nabla_x \mathcal{J}$  :

$$\nabla_x \mathcal{J} = 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}_x + \phi'(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}_x = \sum_{\ell} (\mathbf{q}_\ell^r)^t \mathbf{q}_\ell^r + (\mathbf{q}_\ell^i)^t \mathbf{q}_\ell^i + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{Q}_\ell^r + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{Q}_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$$

$$\mathbf{b}_x = - \sum_{\ell} s_\ell^r (\mathbf{q}_\ell^r)^t + s_\ell^i (\mathbf{q}_\ell^i)^t + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{n}_\ell^r + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{n}_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e}$$

En posant :

$$\begin{aligned} s_\ell &= \Delta Z_\ell - \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{K}_{x0} \mathbf{e}_\ell & \mathbf{q}_\ell &= \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{K}_e \\ \mathbf{n}_\ell &= \mathbf{M} \mathbf{e}_\ell - \mathbf{f}_\ell & \mathbf{Q}_\ell &= \mathbf{K}_e \end{aligned}$$

En définissant :

$$\mathbf{K}_x \mathbf{e} = \mathbf{K}_e \mathbf{x}$$

## F.2 XF-MGM

### F.2.1 Minimisation par rapport à $e$

La minimisation par rapport à  $e_\ell$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $e_\ell$   $\nabla_e \mathcal{J}$  :

$$\nabla_e \mathcal{J} = 2H_e e_\ell - 2b_e$$

$$H_e = C_x^\dagger \left( e_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} e_{0\ell}^t C_x + \lambda (I + A_{\text{inv}} C_x)^\dagger (I + A_{\text{inv}} C_x) \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n}$$

$$b_e = -C_x^\dagger \left( e_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_l + \lambda (I + A_{\text{inv}} C_x)^\dagger e_{0\ell} \in \mathbb{C}^{N_n}$$

### F.2.2 Minimisation par rapport à $x$

La minimisation par rapport à  $x$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $x$   $\nabla_x \mathcal{J}$  :

$$\nabla_x \mathcal{J} = 2H_x x - 2b_x + \phi'(x)$$

$$H_x = \sum_\ell (q_\ell^r)^t q_\ell^r + (q_\ell^i)^t q_\ell^i + \lambda (Q_\ell^r)^t Q_\ell^r + \lambda (Q_\ell^i)^t Q_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$$

$$b_x = -\sum_\ell s_\ell^r (q_\ell^r)^t + s_\ell^i (q_\ell^i)^t + \lambda (Q_\ell^r)^t n_\ell^r + \lambda (Q_\ell^i)^t n_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e}$$

En posant :

$$\begin{aligned} s_\ell &= \Delta Z_\ell - \frac{\sigma_0}{q} e_{0\ell}^t K_{x0} e_\ell & q_\ell &= \frac{\sigma_0}{q} e_{0\ell}^t K_e \\ n_\ell &= e_\ell - e_{0\ell} - A_{\text{inv}} K_{x0} e_\ell & Q_\ell &= A_{\text{inv}} K_e \end{aligned}$$

En définissant :

$$K_x e = K_e x$$

## F.3 XF-CSI

### F.3.1 Minimisation par rapport à $w$

La minimisation par rapport à  $w_\ell$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  par rapport à  $w_\ell$   $\nabla_w \mathcal{J}_{\text{CSI}}$  :

$$\nabla_w \mathcal{J}_{\text{CSI}} = 2H_w w_\ell - 2b_w$$

$$H_w = \left( e_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} e_{0\ell}^t + \lambda (I + C_x A_{\text{inv}})^\dagger (I + C_x A_{\text{inv}}) \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_n \times \tilde{N}_n}$$

$$b_w = -\left( e_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_l + \lambda (I + C_x A_{\text{inv}})^\dagger C_x e_{0\ell} \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_n}$$

### F.3.2 Minimisation par rapport à $x$

La minimisation par rapport à  $x$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  par rapport à  $x$   $\nabla_x \mathcal{J}_{\text{CSI}}$  :

$$\nabla_x \mathcal{J}_{\text{CSI}} = 2H_x x - 2b_x + \phi'(x)$$

$$H_x = \lambda \sum_\ell (Q_\ell^r)^t Q_\ell^r + (Q_\ell^i)^t Q_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$$

$$b_x = -\lambda \sum_\ell (Q_\ell^r)^t n_\ell^r + (Q_\ell^i)^t n_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e}$$

En posant :

$$\mathbf{n}_\ell = \tilde{\mathbf{w}}_\ell - \tilde{\mathbf{K}}_{x0} \mathbf{A}_{\text{inv}} \tilde{\mathbf{w}}_\ell + \tilde{\mathbf{K}}_{x0} \tilde{\mathbf{e}}_{0\ell} \quad \mathbf{Q}_\ell = \tilde{\mathbf{K}}_{w\ell} - \tilde{\mathbf{K}}_{e0\ell}$$

En définissant :

$$\mathbf{K}_x \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{w}_\ell = \mathbf{K}_{w\ell} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{K}_x \mathbf{e}_{0\ell} = \mathbf{K}_{e0\ell} \mathbf{x}$$

## F.4 XF-AL-Basique

### F.4.1 Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$

Le terme du Lagrangien augmenté n'intervient que dans le terme appelé  $\mathbf{b}_{e\ell}$ . On a désormais pour la matrice  $\mathbf{e}_{e\ell}$  et vecteur  $\mathbf{b}_{e\ell}$  de l'équation (VI.3) :

$$\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J} = 2\mathbf{H}_e \mathbf{e}_\ell - 2\mathbf{b}_e$$

$$\mathbf{H}_e = (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x)^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x) + \lambda (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x)^\dagger (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x) \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n}$$

$$\mathbf{b}_e = (\mathbf{K}_{x0} - \mathbf{K}_x)^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_l + \lambda (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x)^\dagger \mathbf{f}_\ell - \frac{1}{2} \zeta_\ell \in \mathbb{C}^{N_n}$$

$$\zeta_\ell = (\mathbf{M} + \mathbf{K}_x)^\dagger (\boldsymbol{\kappa}_\ell^r + j\boldsymbol{\kappa}_\ell^i)$$

On introduit les vecteurs  $\boldsymbol{\kappa}_\ell^r$  et  $\boldsymbol{\kappa}_\ell^i$  extraits de  $\boldsymbol{\kappa}_\ell^{(n)}$  ne concernant respectivement que les parties réelles et imaginaires de l'équation de couplage dans le domaine d'estimation de  $\mathbf{x}$ .

### F.4.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

Le terme du Lagrangien augmenté n'intervient que dans le terme appelé  $\mathbf{b}_x$ . On a désormais pour la matrice  $\mathbf{e}_x$  et vecteur  $\mathbf{b}_x$  de l'équation (VI.4) :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} = 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}_x + \phi'(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}_x = \sum_{\ell} (\mathbf{q}_\ell^r)^t \mathbf{q}_\ell^r + (\mathbf{q}_\ell^i)^t \mathbf{q}_\ell^i + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{Q}_\ell^r + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{Q}_\ell^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}$$

$$\mathbf{b}_x = - \sum_{\ell} \left( s_\ell^r (\mathbf{q}_\ell^r)^t + s_\ell^i (\mathbf{q}_\ell^i)^t + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \mathbf{n}_\ell^r + \lambda (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \mathbf{n}_\ell^i + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_\ell^r)^t \boldsymbol{\kappa}_\ell^r + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_\ell^i)^t \boldsymbol{\kappa}_\ell^i \right) \in \mathbb{R}^{N_e}$$

## F.5 XF-AL-MGM

### F.5.1 Minimisation par rapport à $\mathbf{e}$

La minimisation par rapport à  $\mathbf{e}_\ell$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\mathbf{e}_\ell$   $\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J}$  :

$$\nabla_{\mathbf{e}} \mathcal{J} = 2\mathbf{H}_e \mathbf{e}_\ell - 2\mathbf{b}_e$$

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{C}_x^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t \mathbf{C}_x + \lambda (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x)^\dagger (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x) \in \mathbb{C}^{N_n \times N_n}$$

$$\mathbf{b}_e = -\mathbf{C}_x^\dagger \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_l + \lambda (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x)^\dagger \mathbf{e}_{0\ell} - \frac{1}{2} \zeta_\ell \in \mathbb{C}^{N_n}$$

$$\zeta_\ell = (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{\text{inv}} \mathbf{C}_x)^\dagger (\boldsymbol{\kappa}_\ell^r + j\boldsymbol{\kappa}_\ell^i)$$



### F.5.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

La minimisation par rapport à  $\mathbf{x}$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $\mathbf{x}$   $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J} &= 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}_x + \phi'(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_x &= \sum_{\ell} (\mathbf{q}_{\ell}^r)^t \mathbf{q}_{\ell}^r + (\mathbf{q}_{\ell}^i)^t \mathbf{q}_{\ell}^i + \lambda (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \mathbf{Q}_{\ell}^r + \lambda (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \mathbf{Q}_{\ell}^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e} \\ \mathbf{b}_x &= - \sum_{\ell} s_{\ell}^r (\mathbf{q}_{\ell}^r)^t + s_{\ell}^i (\mathbf{q}_{\ell}^i)^t + \lambda (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \mathbf{n}_{\ell}^r + \lambda (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \mathbf{n}_{\ell}^i + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^r + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^i \in \mathbb{R}^{N_e}\end{aligned}$$

## F.6 XF-AL-CSI

### F.6.1 Minimisation par rapport à $\mathbf{w}$

La minimisation par rapport à  $\mathbf{w}_{\ell}$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  par rapport à  $\mathbf{w}_{\ell}$   $\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{J}_{\text{CSI}}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{J}_{\text{CSI}} &= 2\mathbf{H}_w \mathbf{w}_{\ell} - 2\mathbf{b}_w \\ \mathbf{H}_w &= \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \frac{\sigma_0}{q} \mathbf{e}_{0\ell}^t + \lambda (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}})^{\dagger} (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}}) \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_n \times \tilde{N}_n} \\ \mathbf{b}_w &= - \left( \mathbf{e}_{0\ell} \frac{\sigma_0}{q} \right)^* \Delta Z_l + \lambda (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}})^{\dagger} \mathbf{C}_x \mathbf{e}_{0\ell} - \frac{1}{2} \zeta_{\ell} \in \mathbb{C}^{\tilde{N}_n} \\ \zeta_{\ell} &= (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{A}_{\text{inv}})^{\dagger} (\boldsymbol{\kappa}_{\ell}^r + j \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^i)\end{aligned}$$

### F.6.2 Minimisation par rapport à $\mathbf{x}$

La minimisation par rapport à  $\mathbf{x}$  nécessite le calcul du gradient de  $\mathcal{J}_{\text{CSI}}$  par rapport à  $\mathbf{x}$   $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{CSI}}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{J}_{\text{CSI}} &= 2\mathbf{H}_x \mathbf{x} - 2\mathbf{b}_x \\ \mathbf{H}_x &= \lambda \sum_{\ell} (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \mathbf{Q}_{\ell}^r + (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \mathbf{Q}_{\ell}^i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e} \\ \mathbf{b}_x &= -\lambda \sum_{\ell} (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \mathbf{n}_{\ell}^r + (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \mathbf{n}_{\ell}^i + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\ell}^r)^t \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^r + \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\ell}^i)^t \boldsymbol{\kappa}_{\ell}^i \in \mathbb{R}^{N_e}\end{aligned}$$

## Annexe G

# Reconstructions avec la méthode EDF-EPM

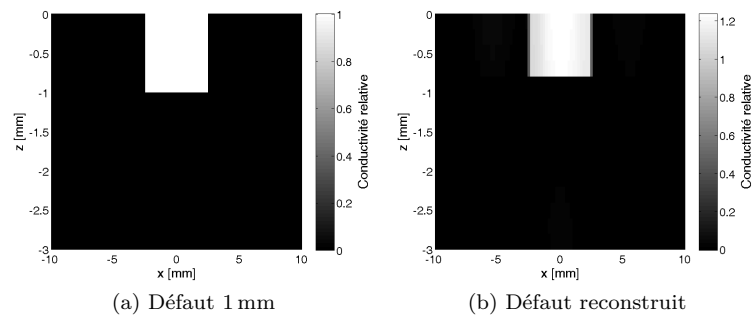


FIG. G.1 – Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut de 1 mm

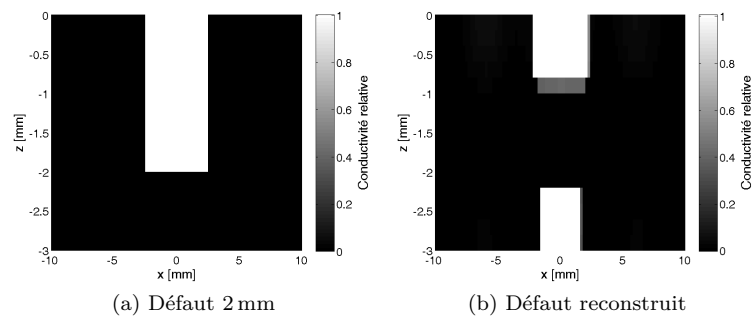


FIG. G.2 – Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut de 2 mm

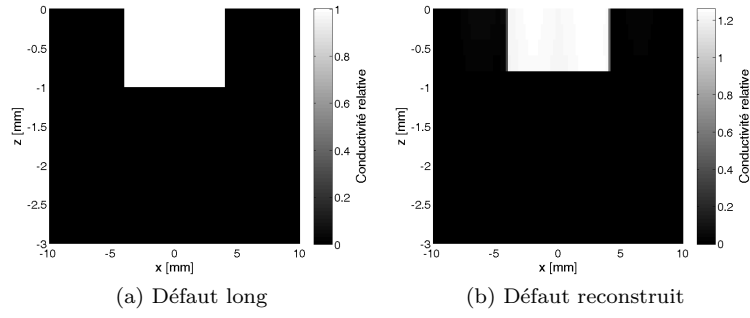


FIG. G.3 – Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut long

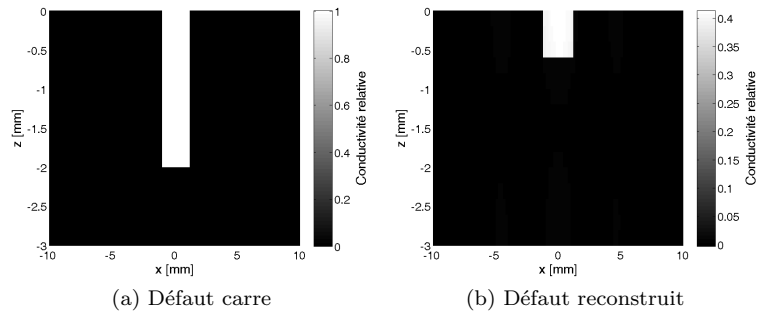


FIG. G.4 – Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut carré

## Annexe H

# Reconstructions avec les méthodes développées

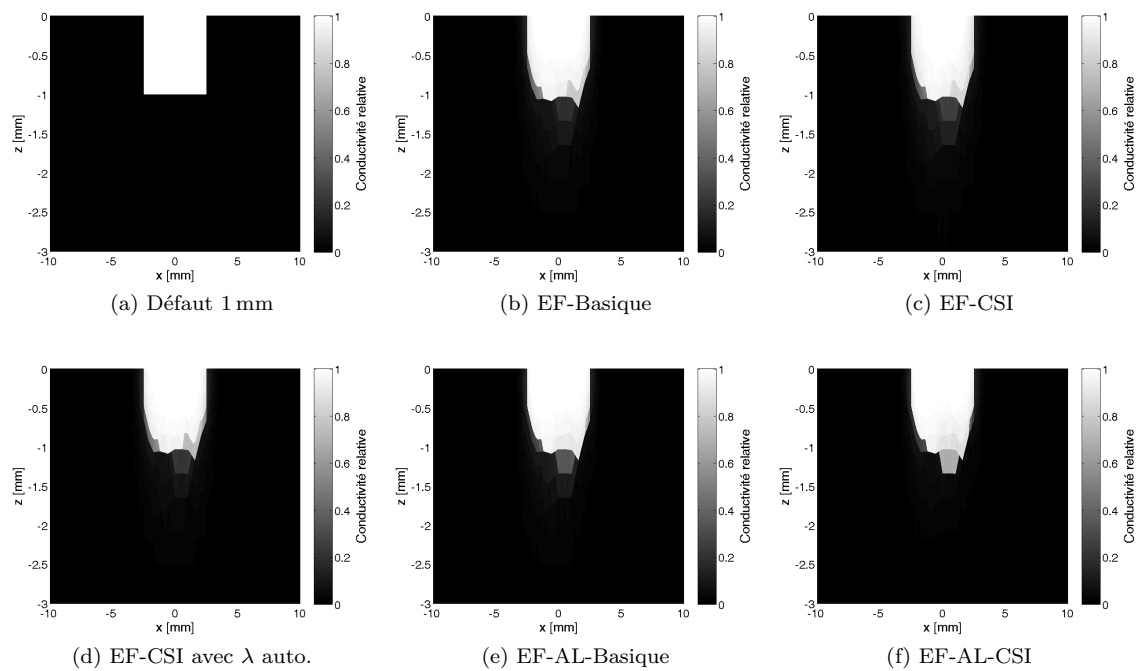


FIG. H.1 – Reconstructions pour le défaut de 1 mm

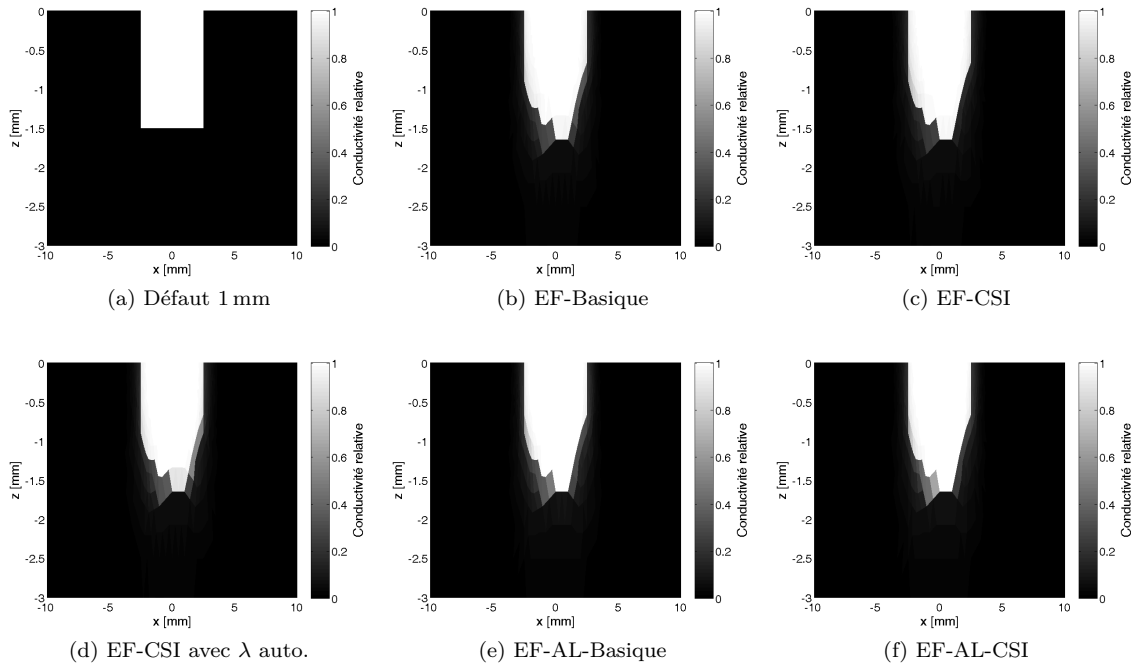


FIG. H.2 – Reconstructions pour le défaut de 1.5 mm

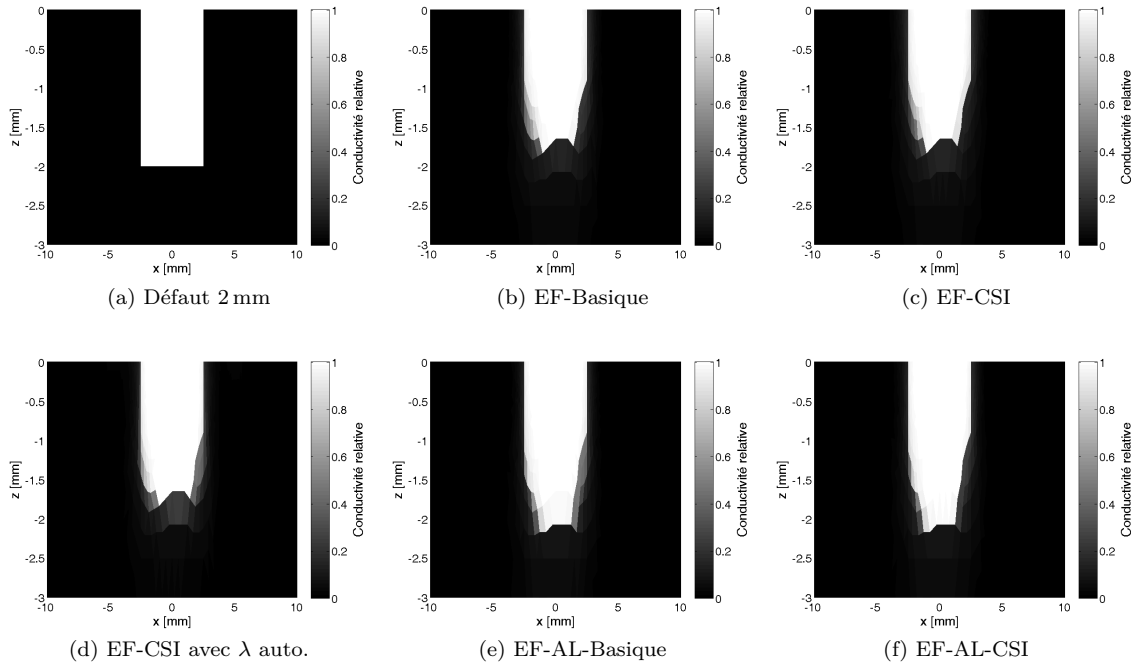


FIG. H.3 – Reconstructions pour le défaut de 2 mm

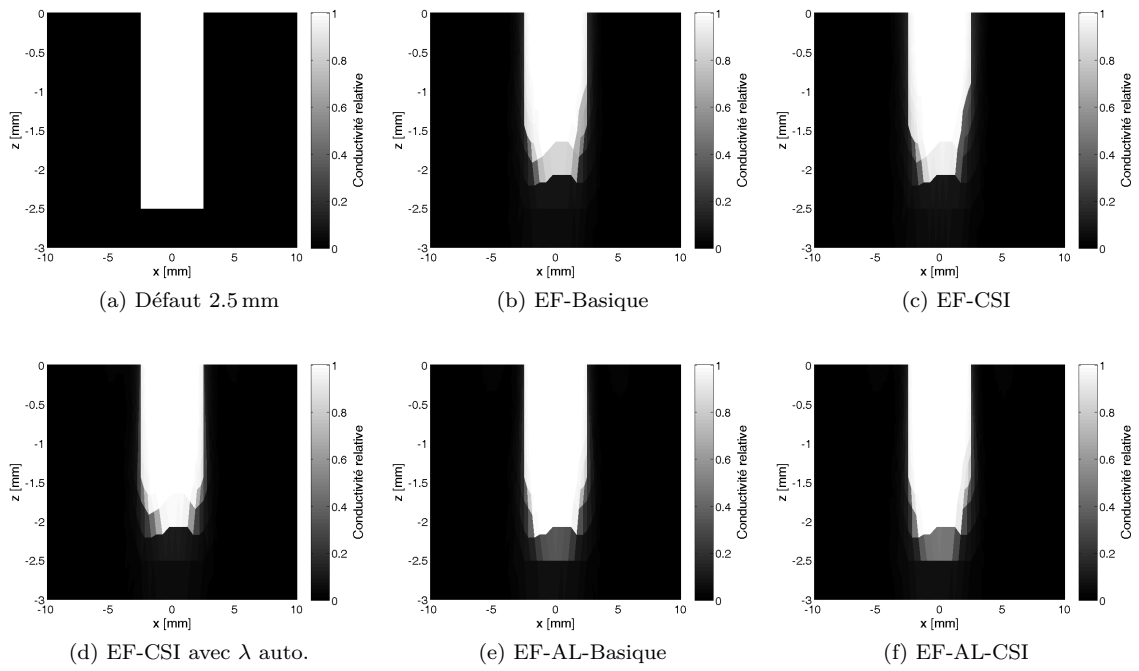


FIG. H.4 – Reconstructions pour le défaut de 2.5 mm

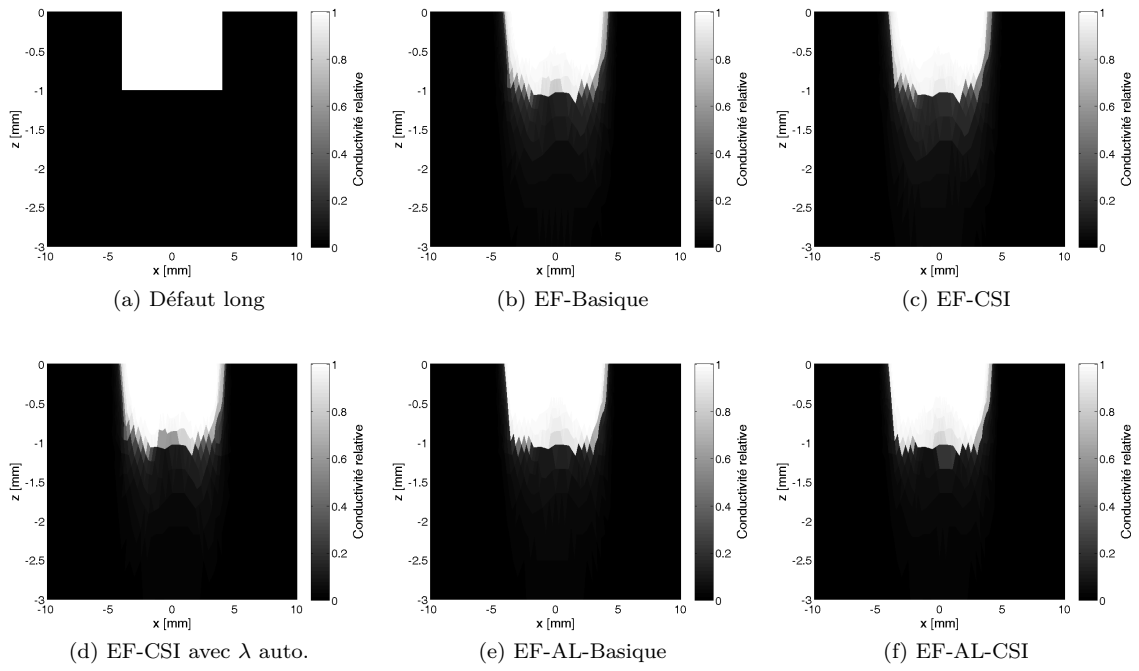


FIG. H.5 – Reconstructions pour le défaut long



# Annexe I

## Modèle éléments finis avec couplage intégral et éléments de Nédélec

L'objectif final est de reconstruire des défauts en 3D à partir de données réelles. Aux chapitres V et VI différentes méthodes de reconstruction sont présentées pour le cas 2D. En 3D, le capteur peut poser des problèmes car il est très difficile d'obtenir un maillage unique qui permette de représenter fidèlement le capteur pour toutes les positions. On propose donc le modèle EF-CI qui évite le maillage du capteur à l'aide d'un couplage intégral. De plus, afin d'éviter des problèmes numériques qui peuvent se poser en 3D, on utilise les éléments de Nédélec.

### I.1 Modèle EF-CI

#### I.1.1 Introduction des edge elements

##### I.1.1.a Principe

Dans l'objectif d'obtenir un modèle direct en 3D, on introduit les edge elements afin d'éviter les modes oscillatoires d'origine numérique *i.e.*, *spurious modes*. Ces phénomènes peuvent se produire en 3D lorsque l'on utilise des fonctions de base scalaires traditionnelles (Jin, 1993).

Dans cette section, on n'indique pas la dépendance des champs à la position  $\vec{r} = (x, z)$  pour alléger l'écriture. On débute avec les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

En utilisant comme précédemment, les relations constitutives (cf équations (II.1)) et en considérant le cas harmonique en temps, on trouve l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \times \left( \sigma^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) + j\omega\mu_0 \vec{H} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Pour obtenir la formulation faible, on multiplie l'équation (I.1) par une fonction test  $\vec{N}$  et on intègre sur le domaine  $\Omega$ . En utilisant le premier théorème de Green vectoriel<sup>1</sup> (Jin, 1993) sur le

---

<sup>1</sup>  $\int_{\Omega} [u \vec{\nabla} \times \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times u \vec{\nabla} \times \vec{b})] \, d\Omega = \int_{\Gamma} u (\vec{a} \times \vec{\nabla} \times \vec{b}) \cdot \vec{n}$



premier terme, on obtient l'équation :

$$\int_{\Omega} \sigma^{-1} \left( \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{N} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q \vec{H} \cdot \vec{N} d\Omega - \int_{\Gamma} \left( \vec{N} \times \sigma^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = 0$$

A l'aide d'une identité vectorielle<sup>2</sup> (Jin, 1993), le terme sur la frontière peut être réécrit comme :

$$\int_{\Gamma} \left( \vec{N} \times \sigma^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left( \vec{N} \times \vec{n} \right) \cdot \left( \sigma^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) d\Gamma$$

Par conséquent ce terme disparaît avec la condition  $\vec{N} \times \vec{n} = 0$ , ce qui est vrai par exemple si  $\vec{N} \in H_0(\text{curl})$ .

On définit les espaces de Sobolev  $H(\text{curl})$  et  $H_0(\text{curl})$  :

$$H(\text{curl}) = \left\{ \vec{u} \in (L^2(\Omega))^3 \mid \vec{\nabla} \times \vec{u} \in (L^2(\Omega))^3 \right\}$$

$$H_0(\text{curl}) = \{ \vec{u} \in H(\text{curl}) \mid \vec{u} \times \vec{n} = 0, \forall x \in \Gamma \}$$

On a la formulation faible du problème (I.2) : on cherche  $\vec{H} \in H_0(\text{curl})$  tel que

$$\int_{\Omega} \sigma^{-1} \left( \vec{\nabla} \times \vec{H} \right) \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{N} \right) d\Omega + \int_{\Omega} q \vec{H} \cdot \vec{N} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{N} d\Omega \quad (\text{I.2})$$

pour toute fonction test  $\vec{N} \in H_0(\text{curl})$ . Un terme source  $\vec{F}(x, z)$  est ajouté pour généraliser l'équation. A noter également que, en deux dimensions, la condition  $\vec{H} \times \vec{n} = 0$  sur la frontière est équivalente à la condition  $\vec{H} \cdot \vec{t} = 0$  avec  $\vec{t}$  le vecteur tangent à la frontière.

### I.1.1.b Calcul des matrices élémentaires

Suivant la méthode des éléments finis, on introduit un maillage triangulaire et on choisit un sous-espace de dimension fini  $V^h \subset H_0(\text{curl})$  qui est généré par des fonctions de base,  $V^h = \text{Vect}(\vec{N}_1, \dots, \vec{N}_{N_v})$ . Dans le cas des *edge elements*, on choisit une fonction de base pour chaque arête du maillage. On n'estime plus la valeur du champ électrique scalaire au niveau de nœuds mais on estime le champ magnétique vectoriel au niveau des arêtes. Sur chaque triangle (comme celui de la figure I.1), on a trois degrés de liberté. Pour chaque arête  $a$ , on choisit une direction pour le vecteur tangent unitaire  $\vec{t}_a$ , et une fonction de base  $\vec{N}_a$  (identique à la fonction test *i.e.*, c'est la méthode de Galerkin) telle que :

$$\frac{1}{|a|} \int_a \vec{N}_a \cdot \vec{t}_a da = 1$$

et telle que la moyenne de sa composante tangentielle est nulle sur les deux autres cotés du triangle. On appelle  $|a|$  la norme de la longueur de l'arête  $a$ .

On appelle  $L_i$  le polynôme linéaire, qui prend la valeur 1 au nœud  $i$ , et 0 aux deux autres nœuds du triangle  $k$ . Pour l'arête reliant les nœuds  $i$  et  $j$  (avec le vecteur tangent orienté de  $i$  vers  $j$ ), la fonction de base sur l'élément  $k$  peut s'écrire :

$$\vec{N}_a = \left( L_i \vec{\nabla} L_j - L_j \vec{\nabla} L_i \right) \ell_{ij}$$

Avec  $\ell_{ij}$  est la longueur de l'arête entre les nœuds  $i$  et  $j$  (Jin, 1993). Puisque cette fonction est linéaire ( $\vec{N}_a \in (\mathcal{P}_1(k))^2$  *i.e.*,  $\vec{N}_a$  a ses deux composantes dans l'espace qui sont des polynômes de degré 1), le rotationnel est constant sur le triangle,

$$\vec{\nabla} \times \vec{N}_a = 2\ell_{ij} \vec{\nabla} L_i \times \vec{\nabla} L_j \quad (\text{I.3})$$

---

<sup>2</sup>  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

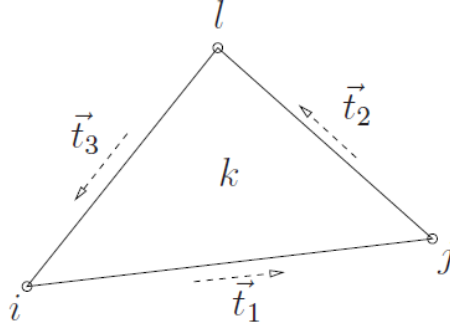


FIG. I.1 – Triangle avec une orientation anti-horaire des vecteurs tangents.

On décompose une fonction  $\vec{H}$  en terme des fonctions de base :

$$\vec{H} = \sum_{a=1}^{N_v} h_a \vec{N}_a,$$

On utilise chacune de ces fonctions de base comme fonction test dans (I.2), on obtient alors

$$\sum_{a=1}^{N_v} h_a \int_{\Omega} \sigma^{-1} (\vec{\nabla} \times \vec{N}_a) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N}_j) d\Omega + \int_{\Omega} q \vec{N}_a \cdot \vec{N}_j d\Omega = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{N}_j d\Omega \quad (\text{I.4})$$

pour  $j = 1, \dots, N_v$ , où  $N_v$  est le nombre d'arêtes du maillage. Lors de l'assemblage des matrices, on ajoute les contributions de chaque élément individuellement localement sur le triangle  $k$  :

– contribution à gauche de l'équation :

$$\sum_{i=1}^3 h_i^k \int_{\Omega^k} \rho^k (\vec{\nabla} \times \vec{N}_i^k) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N}_j^k) d\Omega^k + \int_{\Omega^k} q \vec{N}_i^k \cdot \vec{N}_j^k d\Omega^k$$

– contribution à droite :

$$\int_{\Omega^k} \vec{F} \cdot \vec{N}_j^k d\Omega^k$$

pour  $j = 1, 2, 3$ , et où l'on suppose que la conductivité  $\sigma = \sigma^k = (\rho^k)^{-1}$  est une constante sur chaque triangle avec  $\rho$  la résistivité. Avec l'introduction du champ magnétique, le modèle est linéaire par rapport à  $\rho$  et non  $\sigma$  comme précédemment. On travaille désormais avec la résistivité. Sous forme matricielle, la contribution locale du triangle  $k$  est :

– contribution à gauche :  $\mathbf{K}_x^k \mathbf{h}^k + \mathbf{K}^k \mathbf{h}^k + \mathbf{L}^k \mathbf{h}^k$  ;

– contribution à droite :  $\mathbf{f}^k$ .

On pose  $\mathbf{K}_x^k$  et  $\mathbf{L}^k$  sont les matrices élémentaires de raideur et de masse. De la même manière qu'à la section IV.1, on pose :

$$\mathbf{K}_x^k(i, j) = (\rho_{air} - \rho_0) \int_{\Omega^k} c^k (\vec{\nabla} \times \vec{N}_i^k) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N}_j^k) d\Omega^k$$

$$\mathbf{K}^k(i, j) = \int_{\Omega^k} \rho_0^k (\vec{\nabla} \times \vec{N}_i^k) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N}_j^k) d\Omega^k$$

$$\mathbf{L}^k(i, j) = q \int_{\Omega^k} \vec{N}_i^k \cdot \vec{N}_j^k d\Omega^k$$

$$\mathbf{f}^k(i) = \int_{\Omega^k} \vec{F} \cdot \vec{N}_i^k d\Omega^k$$

En introduisant le contraste (ici la résistivité relative) de l'élément  $k$ ,  $c^k$ , on trouve :

$$c^k = \frac{\rho^k - \rho_0}{\rho_{air} - \rho_0}$$

La variable  $\rho$  représente la résistivité électrique. On la définit par :

$$\rho = 1/\sigma$$

On définit par  $\rho_0$  la résistivité de la plaque métallique et  $\rho_{air}$  la résistivité de l'air. En théorie,  $\rho_{air} = \infty$  mais numériquement, on pose  $\rho_{air} = 1 \Omega.m$ .

Chaque triangle a trois arêtes qui sont partagées avec d'autres triangles. Comme dans le cas des EF nodaux présentés au chapitre IV, le champ magnétique sur une arête ne peut prendre qu'une valeur. En additionnant les contributions de chaque triangle, on obtient finalement le système linéaire

$$(\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_0 + \mathbf{L}) \mathbf{h} = \mathbf{f} \quad (\text{I.5})$$

On pose  $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{K}_0$ . Dans ce cas, la matrice masse est  $\mathbf{L}^k$  et la matrice raideur  $\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_0$ . Dans le cas des éléments finis nodaux (cf section IV.1), il s'agit de l'inverse *i.e.*, la matrice raideur est  $\mathbf{L}^k$  et la matrice masse  $\mathbf{K}_x + \mathbf{K}_0$ .

#### I.1.1.c Assemblage des matrices élémentaires

Concernant les matrices élémentaires  $\mathbf{K}^k$  et  $\mathbf{L}^k$ , il faut porter une attention particulière à la convention sur la direction des vecteurs tangents. Par exemple, dans (Jin, 1993), les matrices données supposent une orientation anti-horaire des vecteurs tangents, localement pour chaque triangle comme à la figure I.1.

Cependant, on doit fixer une orientation pour chaque arête, et cette orientation ne peut pas être de sens anti-horaire pour les deux triangles adjacents en même temps. Donc, on doit ajuster ces matrices élémentaires locales  $\mathbf{K}^k$  et  $\mathbf{L}^k$ , en multipliant la rangée et la colonne  $i$  par  $-1$  si l'arête  $i$  est orienté au sens horaire par rapport au triangle  $k$ .

Pour chaque triangle  $k$ , on peut construire une matrice  $3 \times 3$  diagonale  $\mathbf{D}^k$  telle que  $\mathbf{D}^k(i, i) = 1$  si  $\vec{t}_i$  est dans le sens anti-horaire, et  $\mathbf{D}^k(i, i) = -1$  si  $\vec{t}_i$  est dans le sens horaire par rapport au triangle  $k$ , et la matrice élémentaire est alors :

$$\mathbf{K}_x^k = \mathbf{D}^k \mathbf{K}_{x(\text{Jin})}^k \mathbf{D}^k$$

On appelle  $\mathbf{K}_{x(\text{Jin})}^k$  la matrice telle qu'elle est proposée dans (Jin, 1993).

#### I.1.2 Couplage avec formulation intégrale

En temps normal, il serait possible calculer le champ magnétique, solution de l'équation (I.1), à l'intérieur de la plaque et dans l'espace entourant la bobine. Mais lorsque l'on veut faire bouger la bobine, le domaine de calcul doit être maillé pour chaque position de la bobine. Cette méthode n'est pas efficace car il est nécessaire de calculer la solution pour un grand nombre de positions.

Donc, on utilise ici une formulation réduite : on construit un maillage pour la plaque *seulement*. On impose la condition frontière  $\vec{H} \cdot \vec{t} = 0$  sur les cotés et le dessous des frontières du domaine de calcul  $\Omega$ . Sur la surface ( $z = 0$ ), une condition particulière sera imposée faisant intervenir les contributions au champ magnétique provenant de la bobine et de l'intérieur de la plaque elle-même.

On désigne par  $k_1, k_2, \dots, k_{N_e}$  les éléments (triangles) de la plaque ( $N_e$  nombre d'éléments), et par  $a_1, a_2, \dots, a_{N_v}$  les arêtes du maillage, incluant les bords ( $N_v$  nombre d'arêtes). Comme illustré par la figure II.1, la bobine est modélisée par deux sections parcourues par un courant de 1 A : celle de gauche aura donc une densité de courant de  $J_c = 1/\text{aire} = 2 \times 10^6 \text{ A.m}^{-2}$  et celle droite une densité de courant de  $-J_c$ . On décompose chacune des deux sections de la bobine en deux triangles, que l'on dénote par  $b_1$  et  $b_2$  pour la section de gauche,  $b_3$  et  $b_4$  pour la section de droite.

On utilise un ordre particulier pour les degrés de liberté. On décompose les inconnues en trois groupes distincts

- $\mathbf{h}_i$  : les degrés de liberté pour les arêtes à l'intérieur de la plaque,
- $\mathbf{h}_s$  : ceux se trouvant sur la surface de la plaque,
- $\mathbf{h}_b$  : les degrés de liberté sur les autres bords de la plaque.

Le vecteur d'inconnues peut alors être écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \\ \mathbf{h}_b \end{pmatrix}$$

Suivant ce regroupement, on peut représenter la matrice des éléments finis selon 9 blocs :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{K}_x = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{is} & \mathbf{A}_{ib} \\ \hline \mathbf{A}_{si} & \mathbf{A}_{ss} & \mathbf{A}_{sb} \\ \hline \mathbf{A}_{bi} & \mathbf{A}_{bs} & \mathbf{A}_{bb} \end{array} \right)$$

Parce que l'on impose la condition  $\vec{H} \cdot \vec{t} = 0$ , on a  $\mathbf{h}_b = 0$ , et donc ces inconnues peuvent être immédiatement éliminées du système pour obtenir une matrice réduite,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{is} \\ \hline \mathbf{A}_{si} & \mathbf{A}_{ss} \end{array} \right)$$

Pour les inconnues sur la surface de la plaque, on veut maintenant imposer une condition différente et ainsi remplacer les blocs  $\mathbf{A}_{si}$  et  $\mathbf{A}_{ss}$ . Le champ magnétique  $\mathbf{h}_s$  se compose de deux contributions :

1. le courant dans la bobine génère un champ magnétique  $\vec{H}_{bobine}$  sur la plaque.
2. le champ magnétique à l'intérieur de la plaque,  $\vec{H}$ , induit un courant  $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ , qui à son tour génère un champ magnétique à distance  $\vec{H}_{plaque}$  à la surface de la plaque.

Pour mémoire, les degrés de liberté  $\mathbf{h}$  sont les composantes du champ magnétique tangentielles aux arêtes du maillage. Donc, pour  $\mathbf{h}_s$ , seule la composante selon  $\vec{x}$  du champ est nécessaire.

Des formules analytiques, décrites en détail dans (Sirois and Roy, 2007), permettent de calculer le champ magnétique à un point  $(x, z)$  induit par une densité de courant à travers un triangle donné. Les formules de (Sirois and Roy, 2007) sont applicables en général pour une densité de courant *linéaire* sur le triangle. Dans notre cas, la densité de courant est toujours *constante* sur chaque triangle : on suppose que le densité est constante dans la bobine, et aussi  $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$  est constant sur chaque triangle de la plaque, voir (I.3).

Donc, sur la surface de la plaque, on note par  $C_x^k$  le champ magnétique  $H_x$  au point  $(x, 0)$  produit par une densité de courant *unitaire* sur le triangle  $k$ . Avec cette notation, pour un point fixe  $(x, 0)$  sur la surface, on peut écrire sous forme matricielle :

$$H_x(x, 0) = H_{x,bobine}(x, 0) + H_{x,plaque}(x, 0)$$

$$H_x(x, 0) = \left( C_x^{b_1} \mid C_x^{b_2} \mid C_x^{b_3} \mid C_x^{b_4} \right) \begin{pmatrix} J_c \\ J_c \\ -J_c \\ -J_c \end{pmatrix} + \left( C_x^{k_1} \mid C_x^{k_2} \mid \dots \mid C_x^{k_n} \right) \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n \end{pmatrix}$$

où  $\vec{J}_i$  sont les densités de courant pour chaque élément,  $\vec{J}_i = \vec{\nabla} \times \vec{H}|_i$ . Dans la suite, on pose  $J_i = \vec{J}_i \cdot \vec{y}$ . Ces densités de courant sont calculées à partir des degrés de liberté  $\mathbf{h}$ . Pour un élément  $k$  dont les arêtes sont  $a_i$ ,  $a_j$  et  $a_l$ , on peut écrire :

$$\vec{J}_k = \vec{\nabla} \times \vec{H}|_k = r_{k,i} h_i + r_{k,j} h_j + r_{k,l} h_l,$$

où les coefficients sont obtenus en utilisant (I.3). On peut assembler tous ces coefficients dans une matrice  $\mathbf{R}$ , de dimensions  $N_e \times N_v$ , telle que :

$$\mathbf{j}_{plaque} = \begin{pmatrix} \frac{J_1}{J_2} \\ \vdots \\ \frac{J_n}{J_n} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix}$$

On appelle  $\mathbf{j}_{plaque}$  le vecteur contenant les courants dans la plaque. La matrice  $\mathbf{R}$  est creuse, car seulement 3 éléments sont non-nuls sur chaque ligne de la matrice.  $\tilde{\mathbf{R}}$  est obtenue en éliminant les inconnues  $\mathbf{h}_b = 0$ .

Rappelons à nouveau que les degrés de liberté  $\mathbf{h}$  représentent les valeurs moyennes du champ magnétique tangentiel sur chaque arête du maillage *i.e.*,

$$\mathbf{h}_{surf}(i) = \frac{1}{|a_i|} \int_{a_i} \vec{H}(x, z) \cdot \vec{t}_i ds = \frac{1}{|a_i|} \int_{a_i} \pm H_x(x, 0) dx \quad (\text{I.6})$$

où le  $\pm$  dépend de la direction du vecteur tangent  $\vec{t}_i$ .  $|a_i|$  est la longueur de l'arête  $a_i$ .

Pour une approximation simple de cette intégrale, on utilise le point milieu de l'arête,  $x_i$ , (et on suppose que le vecteur tangent est dans la direction de  $\vec{x}$  positif)

$$H_x(x_i, 0) = \left( C_{x_i}^{b_1} \mid C_{x_i}^{b_2} \mid C_{x_i}^{b_3} \mid C_{x_i}^{b_4} \right) \begin{pmatrix} \frac{J_c}{J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \end{pmatrix} + \left( C_{x_i}^{k_1} \mid C_{x_i}^{k_2} \mid \dots \mid C_{x_i}^{k_n} \right) \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix} \quad (\text{I.7})$$

$$\mathbf{h}_{surf}(i) \approx H_x(x_i, 0)$$

Finalement, en combinant ces équations, une pour chaque arête sur la surface de la plaque, on obtient :

$$\mathbf{h}_s = \begin{pmatrix} C_{x_1}^{b_1} & \dots & C_{x_1}^{b_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{x_s}^{b_1} & \dots & C_{x_s}^{b_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{J_c}{J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \\ \frac{J_c}{-J_c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{x_1}^{k_1} & \dots & C_{x_1}^{k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{x_s}^{k_1} & \dots & C_{x_s}^{k_n} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h}_s = \mathbf{h}_{bobine} + \left( \mathbf{D}_i \mid \mathbf{D}_s \right) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix}$$

On a alors une équation *implicite* pour  $\mathbf{h}_s$ , en transférant les inconnues vers la gauche de l'équation :

$$-\mathbf{D}_i \mathbf{h}_i + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_s) \mathbf{h}_s = \mathbf{h}_{bobine}$$

Le système linéaire à résoudre devient alors :

$$\tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{is} \\ \hline -\mathbf{D}_i & \mathbf{I} - \mathbf{D}_s \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_{bobine} \end{pmatrix} \quad (\text{I.8})$$

On formule quelques remarques :

- l'équation (I.7) est valide lorsque le vecteur tangent de l'arête est dans le sens des  $x$  positifs. Dans le cas contraire, il faut multiplier les coefficients par  $-1$ . Cet ajustement est similaire à celui de la section I.1.1.c pour l'assemblage des matrices.
- le seul terme qui dépend de la position de la bobine est  $\mathbf{h}_{bobine}$ , le reste ne change pas lorsque qu'on la déplace. Pour chaque position, il faut recalculer les coefficients  $C_{x_i}^{b_j}$ ,  $i = 1, \dots, N_e$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ;

- les matrices  $\mathbf{A}_{ii}$  et  $\mathbf{A}_{is}$  sont très creuses, cependant les nouveaux blocs  $-\mathbf{D}_i$  et  $(\mathbf{I} - \mathbf{D}_s)$  du système (I.8) sont des matrices complètement pleines, voir figure I.2. Pour le maillage test avec lequel on travaille, la matrice  $\mathbf{A}$  de départ a seulement 58133 éléments non-nuls, et la nouvelle matrice avec le couplage intégral a 2438921 éléments non-nuls, bien que le nombre d'inconnues sur la surface de la plaque soit seulement 204 ;
- une méthode simple a été utilisée pour l'approximation de l'intégrale en (I.6) (règle du point milieu). Il est possible de choisir d'autres méthodes pour une meilleure approximation, cependant cela demanderait des évaluations additionnelles de  $H_x(x, 0)$ , ce qui ferait augmenter le coût de calcul.

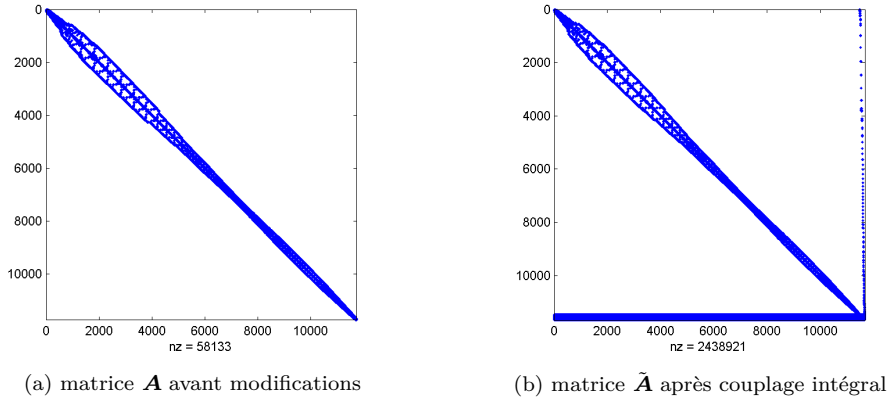


FIG. I.2 – Matrices creuses avant et après modifications

Grâce à ce modèle, il est possible de calculer la distribution du champ magnétique dans la plaque sans nécessité de discrétiser l'espace autour de la bobine. Cependant les multiplications matricielles sont plus coûteuses en temps de calcul à cause des arêtes à la surface de la plaque.

### I.1.3 Préconditionnement pour EF-CI

La méthode éléments finis avec couplage intégral permet d'obtenir une équation algébrique linéaire  $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{h} = \mathbf{f}$  à résoudre afin de calculer le champ magnétique dans une plaque métallique pour un défaut connu. La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  peut être divisée en deux :

- les lignes concernant la modélisation éléments finis proprement dite :

$$\left( \mathbf{A}_{ii} \mid \mathbf{A}_{is} \right)$$

- les lignes concernant la modélisation du couplage intégral :

$$\left( -\mathbf{D}_i \mid \mathbf{I} - \mathbf{D}_s \right)$$

Compte tenu de la nature différente de ces deux parties, il peut y avoir des différences d'échelle, entraînant un mauvais conditionnement de la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . C'est pourquoi, on propose de preconditionner la matrice en question. Etant donné que l'objectif de cette matrice de preconditionnement  $\mathbf{P}$  est de remettre à la même échelle, on propose la définition suivante :

$$\mathbf{P}(i, j) = \begin{cases} 1/|\tilde{\mathbf{A}}_0(i, j)| & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mathbf{P}$  est donc une matrice diagonale. La matrice  $\mathbf{A}$  a un nombre de conditionnement de l'ordre de  $10^8$  tandis que la matrice  $\mathbf{PA}$  a un nombre de conditionnement de  $10^3$  montrant ainsi l'efficacité de ce preconditionnement.

### I.1.4 Variation d'impédance par EF-CI

En suivant le développement au début de l'article (Auld and Moulder, 1999), on arrive à la formule suivante pour la variation d'impédance :

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \int_{\Gamma} \left( \vec{E}_0 \times \vec{H} - \vec{E} \times \vec{H}_0 \right) \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$

On appelle  $\vec{E}_0$  le champ électrique incident et  $\vec{H}_0$  le champ magnétique incident.

La surface  $\Gamma$  peut être n'importe quelle surface fermée qui englobe tous les défauts. En utilisant le théorème de la divergence, on passe à une intégrale de volume à l'intérieur de la surface,

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E}_0 \times \vec{H} - \vec{E} \times \vec{H}_0 \right) \, d\Omega$$

On peut distribuer le produit scalaire selon l'identité :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_0 \times \vec{H} - \vec{E} \times \vec{H}_0) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \vec{H}_0 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0)$$

On remplace ensuite le champ électrique pour obtenir une formule en terme du champ magnétique seulement :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_0 \times \vec{H} - \vec{E} \times \vec{H}_0) = -j\omega\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_0 - \frac{1}{\sigma_0} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0) + j\omega\mu \vec{H} \cdot \vec{H}_0 + \frac{1}{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0)$$

$$\Rightarrow \Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_0} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0) + j\omega(\mu - \mu_0) \vec{H} \cdot \vec{H}_0 \, d\Omega$$

Pour l'exemple, on considère un courant unitaire ( $I_0 = 1 \text{ A}$ ) et une perméabilité qui ne change pas dans le défaut *i.e.*,  $\mu = \mu_0$  :

$$\Delta Z = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_0} \right) (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_0) \, d\Omega$$

Finalement, pour une discrétisation avec les edge elements, sous forme matricielle, la formule de variation d'impédance devient :

$$\Delta Z = \mathbf{h}_0^t (\rho_{air} - \rho_0) \mathbf{K}_x \mathbf{h} \quad (\text{I.9})$$

La variable  $\rho$  représente la résistivité électrique. On la définit par :

$$\rho = 1/\sigma$$

On définit par  $\rho_0$  la résistivité de la plaque métallique et  $\rho_{air}$  la résistivité de l'air. En théorie,  $\rho_{air} = \infty$  mais numériquement, on pose  $\rho_{air} = 1 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ .

### I.1.5 Formulation par rapport au contraste pour EF-CI

On suppose pour l'instant que l'on veut minimiser les équations introduites précédemment par rapport à  $\mathbf{x}$ , qui peut également s'écrire

$$\mathbf{x}(i) = \frac{\rho(i) - \rho_0}{\rho_{air} - \rho_0}$$

pour des résistivités  $\rho = \sigma^{-1}$ ,  $\rho_0 = \sigma_0^{-1}$  et  $\rho_{air} = \sigma_{air}^{-1}$ . à noter que  $\sigma \in [\sigma_{air}, \sigma_0]$  mais que  $\rho \in [\rho_0, \rho_{air}]$ .

Pour les vecteurs d'inconnues :

- $\mathbf{h}_f$  dénote le vecteur de toutes les inconnues, incluant les bords, et selon la numérotation originale ;
- $\mathbf{h}$  est le vecteur d'inconnues après avoir éliminé  $\mathbf{h}_b = 0$  et après une renumérotation pour que  $\mathbf{h}^t = \left( \mathbf{h}_i \mid \mathbf{h}_s \right)$ ,
- $\mathbf{h}^k$  dénote le vecteur des trois inconnues pour l'élément  $k$ .

Désormais, pour les matrices d'éléments finis, on adopte les notations :

- $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{K}_x$ ,  $\mathbf{L}$ , sont les matrices dont on a éliminé les inconnues  $\mathbf{h}_b = 0$  et renuméroté pour obtenir une structure en blocs, par exemple

$$\mathbf{K}_x = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{is} \\ \hline \mathbf{K}_{si} & \mathbf{K}_{ss} \end{array} \right)$$

- $\mathbf{K}^k$  et  $\mathbf{L}^k$  sont les matrices élémentaires de raideur et de masse, de dimension  $3 \times 3$ , pour un élément  $k$ .

On utilise également des matrices de *restriction*, c'est-à-dire des matrices qui ont pour effet d'éliminer certaines rangées d'un vecteur ou d'une matrice. En particulier, on fait intervenir deux restrictions  $\mathbf{R}^{(i)}$  et  $\mathbf{R}^{(is)}$  telles que :

$$\mathbf{R}^{(i)} \mathbf{h}_f = \mathbf{h}_i \quad \mathbf{R}^{(is)} \mathbf{h}_f = \mathbf{h} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{array} \right)$$

On utilise l'équation (I.8) et en développant les produits matriciels, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{h} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{ii} & \mathbf{A}_{is} \\ \hline -\mathbf{D}_i & (\mathbf{I} - \mathbf{D}_s) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_s \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \mathbf{A}_{ii} \mathbf{h}_i + \mathbf{A}_{is} \mathbf{h}_s \\ -\mathbf{D}_i \mathbf{h}_i + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_s) \mathbf{h}_s \end{array} \right) \quad (\text{I.10})$$

On peut également réécrire l'équation (I.10) :

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{h} = \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{h} + \left( \begin{array}{c} \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{K}_x \mathbf{h} \\ 0 \end{array} \right)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{h} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{L} \mathbf{h} \\ -\mathbf{D}_i \mathbf{h}_i + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_s) \mathbf{h}_s \end{array} \right)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_0$  correspond à la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  lorsqu'il n'y a pas de défaut. De plus, seule la matrice  $\mathbf{K}_x$  dépend de  $\mathbf{x}$ .

On introduit une nouvelle matrice  $\mathbf{K}_h$ , qui dépend de  $\mathbf{h}$ , et qu'il faut assembler pour chaque position du capteur définie telle que :

$$\mathbf{K}_h \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N_e} ((\rho_{air} - \rho_0) \mathbf{K}^k \mathbf{h}^k c^k)$$

Pour le calcul de la variation d'impédance avec l'équation (I.9), on veut réécrire le produit  $\mathbf{K}_x \mathbf{h}$  explicitement en terme du contraste  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x \mathbf{h} &= \mathbf{R}^{(is)} \sum_{k=1}^{N_e} (\rho_{air} - \rho_0) c^k \mathbf{K}^k \mathbf{h}^k = \mathbf{R}^{(is)} \sum_{k=1}^{N_e} (\rho_{air} - \rho_0) \mathbf{K}^k \mathbf{h}^k c^k, \\ \mathbf{K}_x \mathbf{h} &= (\rho_{air} - \rho_0) \mathbf{R}^{(is)} \mathbf{K}_h(\mathbf{h}) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$



### I.1.6 Simulation

On cherche à valider et évaluer le modèle développé par EF à l'aide du logiciel commercial COMSOL qui fera office de référence dans la suite de cette étude. On se contentera de comparer les résultats en terme de variation d'impédance, en considérant que si la variation d'impédance est correcte par méthode EF, il est vraisemblable que les champs calculés soient bien estimés également. On teste le modèle 2D en simulant un capteur au-dessus d'une plaque sans défaut. On utilise la même méthodologie qu'au chapitre III, la distribution du champ électrique est calculé à l'aide d'une modélisation différente. De plus, la variation d'impédance pour le modèle COMSOL est une nouvelle fois estimée en calculant la différence de potentiel électrique aux bornes du capteur avec et sans défaut, sans utiliser la formule d'Auld.

On trace à la figure I.3, les résultats de simulation avec COMSOL et avec le modèle EF.

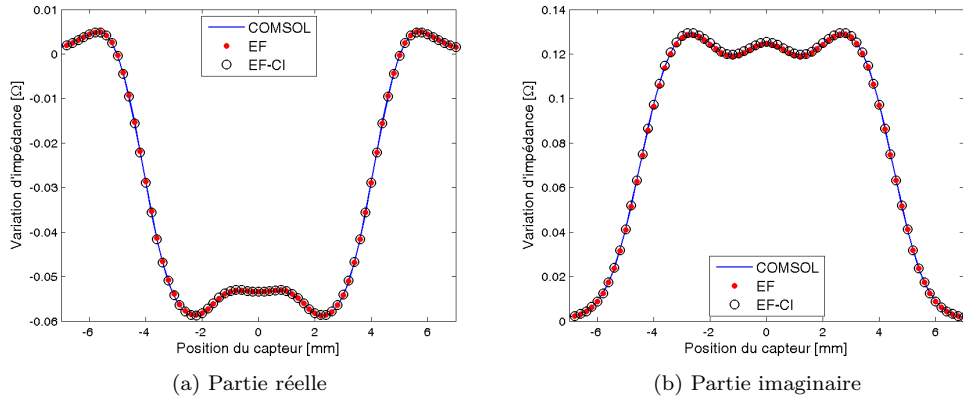


FIG. I.3 – Comparaison entre les données : parties réelle (a) et imaginaire (b)

On remarque à la figure I.3 que les résultats obtenus entre les deux modélisations sont très proches. Afin de mieux montrer l'efficacité des deux modèles, on trace à la figure I.4, l'écart entre chaque modèle par rapport à COMSOL.

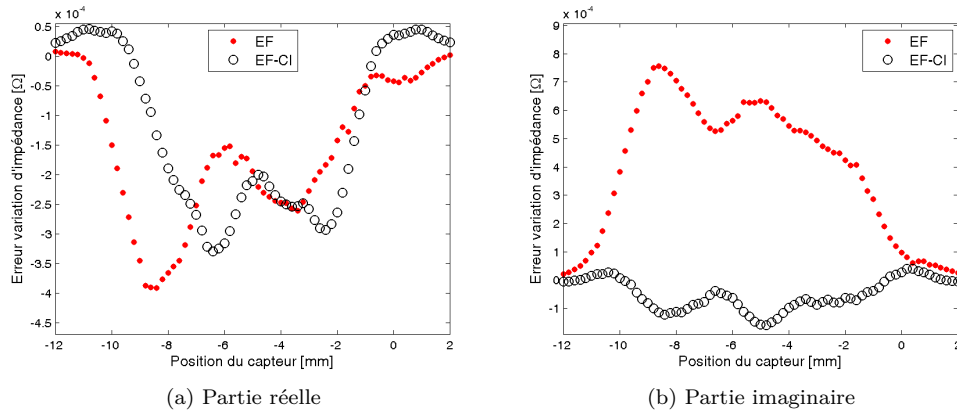


FIG. I.4 – Ecart entre les données et COMSOL : parties réelle (a) et imaginaire (b)

On observe une bonne adéquation des modèles utilisés à COMSOL, sachant que ce dernier est considéré comme la référence. Sur la partie réelle des données, les deux modèles ont des performances comparables. Par contre, sur la partie imaginaire, le modèle EF-CI a de meilleurs résultats.

Si on calcule l'écart quadratique moyen entre les données COMSOL et les données EF, tel que défini au chapitre III, on trouve :

- $2.51 \times 10^{-7}$  pour le modèle EF ;
- $3.81 \times 10^{-8}$  pour le modèle EF-CI.

De même pour l'écart quadratique relatif :

- $2.32 \times 10^{-5}$  pour le modèle EF ;
- $3.51 \times 10^{-6}$  pour le modèle EF-CI.

Les modélisations sont très efficaces et on relève une meilleure adéquation du modèle avec couplage intégral.

## I.2 Inversion

On prend un formalisme très proche de celui utilisé au chapitre V pour développer le critère à minimiser pour obtenir une solution au problème.

Dans le cas du modèle par EF (avec éléments d'arête et couplage intégral), la variable électromagnétique  $\mathbf{h}$  considérée est le champ magnétique. On trouve les équations suivantes en se référant à la section I.1.2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_x^m &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{K}_x \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{K}_x^d &= -(\rho_0 - \rho_{air}) \mathbf{K}_x \\ \mathbf{K}_h^m &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{K}_h \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{K}_h^d &= (\rho_{air} - \rho_0) \mathbf{R}^{(is)} \mathbf{K}_h \\ \mathbf{K}_{x0}^d &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Afin de différencier, la conductivité relative et la résistivité relative, on les appelle respectivement  $\mathbf{x}_\sigma$  et  $\mathbf{x}_\rho$ .

On peut se demander quelle variable doit être régularisée. Au chapitre V, la variable régularisée est la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$  car les équations obtenues pour le modèle direct montre une bilinéarité par rapport à  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{x}_\sigma$ . Le modèle EF-CI a des équations bilinéaires par rapport à  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{x}_\rho$ . De manière équivalente, la régularisation doit porter sur la résistivité relative. Cependant, pour le modèle EF-CI, on régularise la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$  et non la résistivité relative  $\mathbf{x}_\rho$ . En effet, les données sont beaucoup moins sensibles à la résistivité  $\rho$  qu'à la conductivité  $\sigma$ . De plus, la conductivité de l'air est nulle, la résistivité de l'air est donc infinie. Il est donc nécessaire d'imposer une valeur numérique à la résistivité de l'air suffisamment élevée pour ne plus avoir d'impact sur les données. Durant la reconstruction, la résistivité relative augmente jusqu'à ce qu'elle soit suffisamment élevée pour ne plus avoir d'impact sur les données, il y a une indétermination d'échelle sur la résistivité. Il est donc préférable de régulariser la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$  car les données y sont plus sensibles. On illustre ce point à la figure I.5.

On voit sur cette figure, que lorsque la résistivité relative  $\mathbf{x}_\rho > 10^{-5}$ , la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$  est très proche de 1. Sur les données, une forte variation sur la résistivité relative a une très faible variation sur les données. En effet, à titre d'exemple,  $\mathbf{x}_\rho = 10^{-4}$  et  $\mathbf{x}_\rho = 1$  procurent des données très proches. On voit clairement apparaître sur cette figure, l'indétermination d'échelle de la résistivité relative. Dès lors, il paraît difficile de pouvoir mettre en œuvre une régularisation efficace ainsi qu'un réglage adapté des hyperparamètres lorsque l'ordre de grandeur de la variable en question est aussi indéterminé. C'est pourquoi on préfère régulariser la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$  et non la résistivité relative  $\mathbf{x}_\rho$ .

Dès lors un changement de variable est envisageable, en passant de  $\mathbf{x}_\rho$  à  $\mathbf{x}_\sigma$ . Un changement de variable est très facile à prendre en compte lors de la minimisation du critère  $\mathcal{J}$  :

$$\nabla_{\mathbf{x}_\rho} \mathcal{J} = \mathbf{J} \nabla_{\mathbf{x}_\sigma} \mathcal{J}$$

La matrice  $\mathbf{J}$  est la matrice diagonale dont la diagonale est  $\frac{\partial \mathbf{x}_\sigma}{\partial \mathbf{x}_\rho}$ .

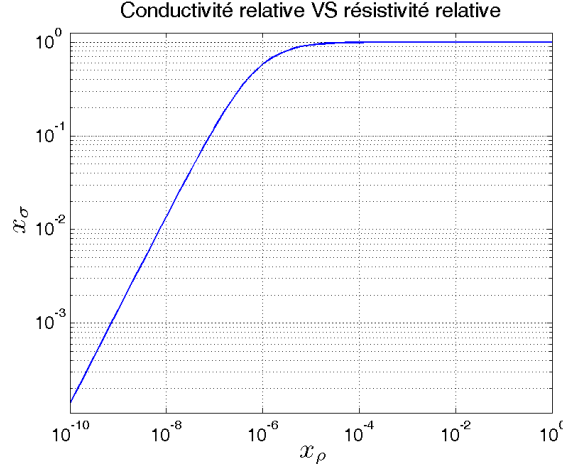


FIG. I.5 – Conductivité relative en fonction de la résistivité relative

Cependant, avec le changement de variable les équations d'observation et de couplage deviennent non-linéaires par rapport au contraste et des problèmes de convergence lors de la minimisation apparaissent, la décroissance du critère est très lente. On n'effectue donc pas de changement de variable pour ces deux équations.

On minimise le critère suivant :

$$\mathcal{J}_{\text{Basique}}(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{h}; \lambda) = J_1(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{h}) + \lambda J_2(\mathbf{x}_\rho, \mathbf{h}) + \phi(\mathbf{x}_\sigma)$$

La fonction  $\phi(\mathbf{x})$  est la même que celle au chapitre V.

On utilise uniquement l'approche XF-Basique car plus simple à mettre en œuvre.

### I.3 Reconstructions

Le modèle EF-CI est une évolution du modèle EF afin de pouvoir contourner des problèmes de mémoire et de maillage qui peuvent se produire avec le modèle EF classique en 3D. Cependant, le modèle EF-CI n'emploie pas la même variable électromagnétique que les modèles DF et EF. Ce changement de variable électromagnétique introduit quelques difficultés de résolution du problème puisqu'il n'y a plus de linéarité par rapport à  $\sigma$  la conductivité mais par rapport à  $\rho$  la résistivité. Malheureusement le modèle est peu sensible à  $\rho$  et la non-linéarité par rapport à  $\sigma$  semble rendre plus difficile la minimisation du critère. On montre à la figure I.6 les résultats de reconstruction obtenus avec la minimisation du critère EF-CI-Basique par rapport à  $\mathbf{x}_\rho$  en régularisant  $\mathbf{x}_\rho$  de la même façon qu'au chapitre V. La pénalisation  $L_2L_1$  est employée pour le champ de Markov, la norme  $L_1$  est utilisée pour le rappel à 0 et des bornes sont imposées au contraste (conductivité relative ou résistivité relative).

On remarque que la reconstruction obtenue est très éloignée du défaut à reconstruire. De plus, on confirme que  $\mathbf{x}_\rho$  n'est pas la variable représentant le mieux le défaut puisque la résistivité relative est très faible alors que la conductivité relative est proche de la valeur attendue. Enfin, une étude du critère permet d'observer une très lente décroissance de tous les termes du critère. De plus, un fort bruit apparaît en profondeur dans la reconstruction. Ce bruit a un ordre de grandeur proche de celui du défaut reconstruit. C'est pourquoi il a été proposé auparavant de régulariser  $\mathbf{x}_\sigma$  et non  $\mathbf{x}_\rho$ .

Il y a deux variables potentielles qui peuvent être employées pour la minimisation et il faut en choisir une. Compte tenu des résultats obtenus aux chapitres VIII et IX et du peu de sensibilité des données à la résistivité relative  $\mathbf{x}_{rho}$ , il paraît naturel de choisir  $\mathbf{x}_\sigma$  pour la minimisation. Après quelques tests, il apparaît que minimiser par rapport à  $\mathbf{x}_\sigma$  n'est pas le meilleur choix. On

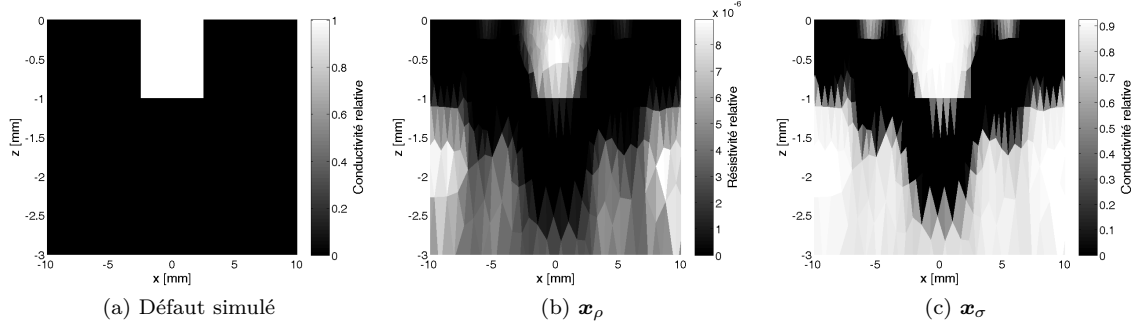


FIG. I.6 – Reconstructions pour la méthode EF-CI-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur avec régularisation sur  $\mathbf{x}_\rho$

propose alors différents changements de variable afin de minimiser le critère. A la figure I.7, on compare les résultats de minimisation par rapport à :

- $\mathbf{x}_\rho$  : car les équations du modèle sont linéaires par rapport à la résistivité relative ;
- $\mathbf{x}_\sigma$  : car les données sont plus sensibles à la conductivité relative ;
- $\ln\{\rho\}$  : car le logarithme permet d'éviter d'avoir à choisir entre résistivité et conductivité,  $\ln\{\rho\} = -\ln\{\sigma\}$ .

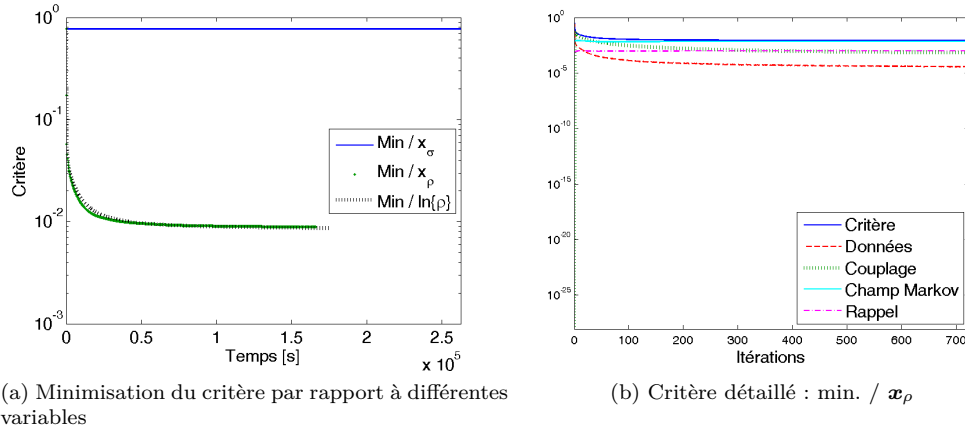


FIG. I.7 – Critère EF-CI-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur

On remarque sur cette figure que le critère ne diminue pas très rapidement dans le cas de la minimisation par rapport à  $\mathbf{x}_\sigma$ . On remarque également que la minimisation par rapport à  $\mathbf{x}_\rho$  fonctionne plus efficacement que la minimisation par rapport à  $\ln\{\rho\}$  car elle nécessite moins de temps. Cependant, la petite différence du temps nécessaire ne permet pas de généraliser et d'affirmer avec certitude que  $\mathbf{x}_\rho$  est la variable à employer pour être le plus rapide. On montre à la figure I.8 les résultats de reconstruction obtenus.

On voit que les reconstructions sont très proches dans le cas de la minisation du critère par rapport à  $\mathbf{x}_\rho$  et  $\ln\{\rho\}$ , ce qui confirme le bon fonctionnement de la méthode et le bon choix des variables. En effet, le même critère est minimisé, en théorie quelle que soit la variable employée pour la minimisation la solution est inchangée aux minima locaux près. Le choix de la variable par rapport à laquelle on minimise n'est pas censé avoir d'impact sur la solution obtenue à la convergence mais uniquement sur la rapidité de convergence. Par contre, la solution obtenue avec la minimisation du critère par rapport à  $\mathbf{x}_\sigma$  est très éloignée de la solution recherchée. De plus, la courbe de décroissance du critère pour cette minimisation à la figure I.7 montre le mauvais

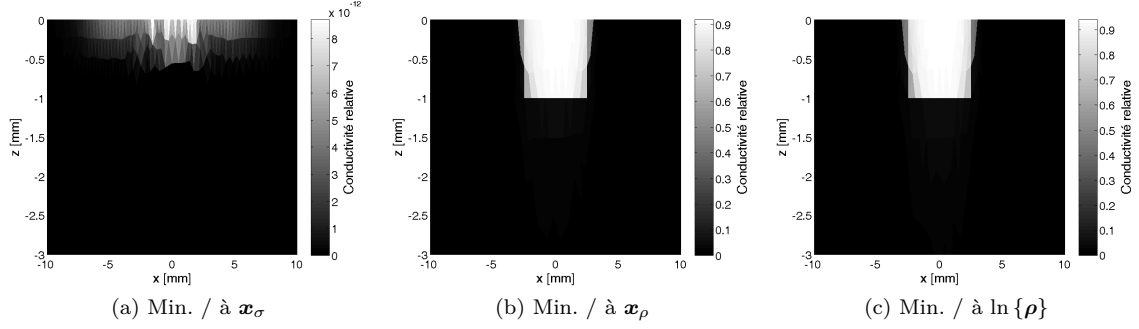


FIG. I.8 – Défaut de 1 mm de profondeur avec la méthode EF-CI-Basique avec régularisation sur  $\mathbf{x}_\rho$  et minimisation par rapport à  $\mathbf{x}_\rho$  : (a) défaut simulé, (b) solution  $\mathbf{x}_\rho$  et (c)  $\mathbf{x}_\sigma$

conditionnement du critère par rapport à cette variable.

## I.4 Conclusion

Un modèle basé sur les éléments finis avec éléments de Nédélec et couplage intégral a été présenté dans ce chapitre. Il a été développé pour éviter le maillage de la bobine et diminuer la taille du problème de CF à résoudre.

Dans le cadre de l'inversion, ce modèle présente certaines difficultés pour la minimisation du critère car les équations du modèle direct sont linéaires par rapport à la résistivité relative  $\mathbf{x}_\rho$ , contrairement aux cas présentés dans ce manuscrit. Par contre, les données sont très peu sensibles à cette variable c'est pourquoi il est nécessaire de régulariser la conductivité relative  $\mathbf{x}_\sigma$ . Dès lors il est naturel d'envisager minimiser le critère par rapport à  $\mathbf{x}_\sigma$ . Or, les équations sont non-linéaires par rapport à  $\mathbf{x}_\sigma$  ce qui semble dégrader le conditionnement du critère et compliquer la minimisation. Enfin, les premières implémentations effectuées en 3D montrent de grosses difficultés et même si le nombre d'éléments diminue la mémoire nécessaire est très importante à cause de la partie couplage intégral dans les matrices intervenant.

## Annexe J

# Capteurs CF

Pour faire les mesures, on utilise un capteur qui émet un rayonnement à l'interface entre le métal et l'air et qui mesure le champ électrique diffracté par le défaut. Les capteurs qui peuvent être utilisés sont différents :

- capteurs à fonctions séparées : l'émetteur et le récepteur ne sont pas les mêmes ;
- capteurs à fonctions communes : l'émetteur et le récepteur sont confondus.

Un capteur à courants de Foucault est constitué d'une ou plusieurs bobines selon le cas. Une bobine sert à émettre un rayonnement dans l'objet métallique à étudier tandis que l'autre sert à mesurer le champ diffracté par le défaut dans l'objet. C'est en réalité la différence d'impédance aux bornes de la bobine que l'on mesure. Lorsque l'on a un capteur à fonctions communes, la bobine qui émet est la même que celle qui mesure.

On trouve des exemples de capteurs dans (Sollier and Lechien, 2003) :

- COM1 : capteur à fonctions communes avec noyau de ferrite ;
- COM2 : capteur à fonctions communes sans noyau de ferrite ;
- SEP1 : capteur à fonctions séparées ;
- SEP3 : capteur à fonctions séparées souple. Sa souplesse lui permet d'être utilisé sur des structures de forme particulière.

On peut voir sur la figure J.1 les schémas des capteurs COM1 et SEP1. Ils sont tous deux constitués d'un noyau de ferrite pour augmenter la finesse et la résolution du capteur.

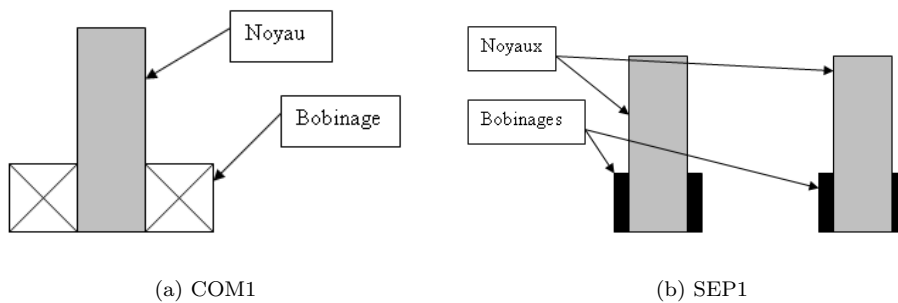


FIG. J.1 – Schémas des capteurs COM1 et SEP1

Le capteur COM2 est très proche du capteur COM1 à la différence près qu'il n'y a pas de noyau de ferrite.

A la figure J.2, des données mesurées sur des défauts électroérodes avec le capteur COM2 sont présentées.

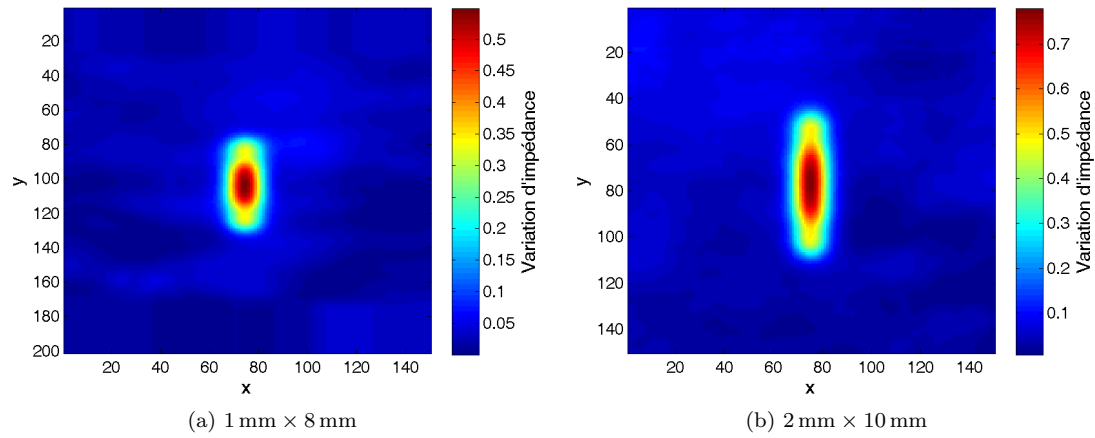


FIG. J.2 – Exemple de données avec le capteur COM1

Sur cette figure, deux entailles électroérochées sont présentées :

- celle de gauche fait 1 mm de profondeur et 8 mm de longueur ;
- celle de droite fait 2 mm de profondeur et 10 mm de longueur.

# Bibliographie

- J. F. Abascal, M. Lambert, D. Lesselier, and O. Dorn. Nonlinearized mapping of volumetric defects affecting a metal tube. In H.-B. L. Y.-K. Shin and S.-J. Song, editors, *Electromagnetic nondestructive evaluation (XII)*. IOS Press, 2009.
- A. Abubakar and T. M. Habashy. Application of the MR-CSI method for three-dimensional imaging of the triaxial induction measurements. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, PP(99) :1 –7, 2010.
- A. Abubakar and P. Van Den Berg. Total variation as a multiplicative constraint for solving inverse problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9) :1384 – 1392, 2001.
- A. Abubakar, P. van den Berg, and R. Bloemenkamp. Full three-dimensional multi-frequency electromagnetic inversion. In *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium. 2001 Digest. Held in conjunction with : USNC/URSI National Radio Science Meeting (Cat. No.01CH37229)*, volume 2, pages 658 – 61, Boston, MA, USA, 2001.
- A. Abubakar, S. Semenovt, V. Posukh, and P. van den Berg. Application of the multiplicative regularized contrast source inversion method to real biological data. In *Microwave Symposium Digest, 2005 IEEE MTT-S International*, pages 4 pp.–, June 2005.
- A. Abubakar, T. Habashy, V. Druskin, and L. Knizhnerman. An enhanced gauss-newton inversion algorithm using a dual-optimal grid approach. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44(6) :1419–1427, June 2006.
- A. Abubakar, W. Hu, P. van den Berg, and T. Habashy. A finite-difference contrast source inversion method. *Inverse Problems*, 24(6) :065004 (17pp), 2008a.
- A. Abubakar, W. Hu, P. van den Berg, and T. Habashy. A contrast source inversion method for reconstructing objects in an inhomogeneous background medium. In *2008 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, page 4 pp., San Diego, CA, USA, 2008b.
- A. Abubakar and P. M. van den Berg. Iterative forward and inverse algorithms based on domain integral equations for three-dimensional electric and magnetic objects. *J. Comput. Phys.*, 195 (1) :236–262, 2004.
- V. Agarwal, A. V. Gribok, and M. A. Abidi. Image restoration using  $l_1$  norm penalty function. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(8) :785 – 809, 2007.
- M. Ainsworth and J. Oden. Posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(1-2) :1 – 88, 1997.
- B. Auld and J. Moulder. Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 18(1) :3 – 36, 1999.
- C. A. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 1989.



- P.-A. Barrière, Y. Goussard, J.-J. Laurin, and J. Idier. New approximate formulations for fast inversion of highly nonlinear problems in microwave tomography. *Submitted in October 2008 to IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 2008.
- P.-A. Barrière, J. Idier, Y. Goussard, and J.-J. Laurin. A 3-term optimization criterion for faster inversion in microwave tomography. In *Proc. IEEE ISBI*, pages 225–228, Washington, DC, USA, avr. 2007.
- P.-A. Barrière, J. Idier, Y. Goussard, and J.-J. Laurin. On algorithms based on joint estimation of currents and contrast in microwave tomography, 2009. URL <http://arxiv.org/abs/0901.4723>.
- J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994.
- M. Bertero, P. Boccacci, G. Desidera, and G. Vicidomini. Image deblurring with poisson data : from cells to galaxies. *Inverse Problems*, 25(12) :123006 (26pp), 2009.
- D. P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods (Optimization and Neural Computation Series)*. Athena Scientific, 1 edition, 1996. ISBN 1886529043.
- D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, September 1999. ISBN 1886529000.
- J. Besag. On the statisical analysis of dirty pictures. *J. R. Statist. Soc. B*, 48 :259–302, 1986.
- A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*. MIT Press, 1987. ISBN 0-262-02271-0.
- C. Bouman and K. Sauer. A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(3) :480–492, Mar 1996.
- C. Bouman and K. Sauer. Generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *IEEE Transactions of Image Processing*, 2(3) :296 – 310, 1993.
- J. Bowler, L. Sabbagh, and H. Sabbagh. Eddy-current probe impedance due to a surface slot in a conductor. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :889 – 892, 1990.
- R. H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. A limited-memory algorithm for bound-constrained optimization, 1995.
- S. Caorsi, A. Massa, M. Pastorino, A. Randazzo, and A. Rosani. A reconstruction procedure for microwave nondestructive evaluation based on a numerically computed green’s function. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 53(4) :987–992, Aug. 2004.
- H. Carfantan and A. Mohammad-Djafari. *Overview of nonlinear diffraction tomography within a Bayesian estimation framework*, volume 486, pages 107–124. Springer Berlin / Heidelberg, 1997a.
- H. Carfantan, A. Mohammad-Djafari, and J. Idier. Single site update algorithm for nonlinear diffraction tomography. In *ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - Proceedings*, volume 4, pages 2837 – 2840, Piscataway, NJ, USA, 1997.
- H. Carfantan. *Approche bayésienne pour un problème inverse non linéaire en imagerie à ondes diffractées*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, 1996.
- H. Carfantan and A. Mohammad-Djafari. A Bayesian framework for nonlinear diffraction tomography. In *IEEE EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP’97*, Mackinac island, MI, September 1997b.
- F. Champigny. Inspection en service des REP. *Techniques de l’ingénieur*, 2005.

- P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 2, pages 168 –172 vol.2, nov 1994.
- P. Charbonnier, L. Blanc-Feraud, G. Aubert, and M. Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298–311, Feb 1997.
- L. Chatellier, S. Dubost, and F. Peisey. Application de la méthode de caractérisation par CF au contrôle des zones de mélanges du RRA. Note EDF, EDF, 2006. H-P1B-2006-00770-FR.
- P. Chaturvedi and R. Plumb. Electromagnetic imaging of underground targets using constrained optimization. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, 33(3) :551–561, May 1995.
- W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. John Wiley & Sons, 1999.
- W. C. Chew and Y. M. Wang. Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted born iterative method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(2) :218 – 225, 1990.
- P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1978. ISBN 0-444-85028-7.
- P. Ciuciu, J. Idier, and J.-F. Giovannelli. Regularized estimation of mixed spectra using a circular gibbs-markov model. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(10) :2202 – 2213, 2001.
- D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*,. Applied Mathematical Sciences 93. Springer-Verlag, 1992. ISBN 0-387-55518-8, 3-540-55518-8, Bibl : M3 93 74.
- M.-E. Davoust, L. L. Brusquet, and G. Fleury. Robust estimation of flaw dimensions using remote field eddy current inspection. *Meas. Sci. Technol.*, 17 :3006–3014, 2006.
- L. Denis, F. Tupin, J. Darbon, and M. Sigelle. Sar image regularization with fast approximate discrete minimization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(7) :1588 – 1600, 2009.
- A. Devaney and G. Sherman. Nonuniqueness in inverse source and scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(5) :1034–1037, Sep 1982.
- D. Donoho. Compressed sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(4) :1289–1306, April 2006.
- D. Dos Reis, M. Lambert, and D. Lesselier. Eddy-current evaluation of three-dimensional defects in a metal plate. *Inverse Problems*, 18(6) :1857 – 1871, 2002.
- S. Dubost and M. El-Guedri. Méthode de reconstruction 3D de défauts à partir de mesures CF : Application à la caractérisation de défauts débouchant dans les plaques de partition des GV. Note EDF, EDF, 2008. H-P1B-2008-01414-FR.
- S. Dubost, L. Chatellier, F. Peisey, Y. Goussard, and R. Guichard. Characterization of small surface-breaking defects with eddy current sensor measurements. In *Proc. ECNDT 2006*, Berlin, Germany, sep. 2006.
- P. Dular, R. Sabariego, and L. Krähenbühl. A perturbation finite element method for efficiently calculating skin and proximity effects in any conductive material. In *Actes de la 5ème conférence européenne sur les méthodes numériques en électromagnétisme Numelec*, pages 658 – 61, 2006.
- J. Dumont-Fillon. Contrôle non destructif (CND). *Techniques de l'ingénieur*, 1996.

- J.-P. Dussault. Improved convergence order for augmented penalty algorithms. *Computational Optimization and Applications*, 2008.
- O. Feron, B. Duchene, and A. Mohammad-Djafari. Microwave imaging of piecewise constant objects in a 2d-te configuration. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 26(3-4) :167 – 74, 2007.
- J. Fessler and S. Booth. Conjugate-gradient preconditioning methods for shift-variant PET image reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(5) :688–699, May 1999.
- J. Fessler, E. Ficaró, N. Clinthorne, and K. Lange. Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(2) :166 –175, april 1997.
- B. Fornberg. Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids. *Math. Comp.*, 51(184) :699–706, 1988.
- A. Fortin and A. Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique, 2011. URL [http://www.giref.ulaval.ca/~afortin/cours\\_elements\\_finis/documents/notes\\_elements\\_finis.pdf](http://www.giref.ulaval.ca/~afortin/cours_elements_finis/documents/notes_elements_finis.pdf).
- A. Franchois and C. Pichot. Microwave imaging-complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(2) :203–215, Feb 1997.
- L. Garnero, A. Franchois, J.-P. Hugonin, C. Pichot, and N. Joachimowicz. Microwave imaging-complex permittivity reconstruction-by simulated annealing. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 39(11) :1801–1807, Nov 1991.
- D. Geman. *Random fields and inverse imaging*. Springer-Verlag, 1990.
- S. Geman and D. E. McClure. Statistical methods for tomographic image reconstruction. In *Proceedings of the 46-th Session of the ISI, Bulletin of the ISI*, volume 52, pages 22–26, 1987.
- W. Gilks, S. Richardson, and D. Spiegelhalter. *Markov Chain Monte Carlo in practice*. Chapman & Hall/CRC, 1996.
- C. Gilmore, A. Abubakar, W. Hu, T. Habashy, and P. van den Berg. Microwave biomedical data inversion using the finite-difference contrast source inversion method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57(5) :1528–1538, May 2009.
- Y. Goussard and R. Guichard. Imagerie de défauts débouchants par courants de Foucault. Rapport de recherche, EPM, 2001.
- Y. Goussard and R. Guichard. Tomographie par courants de Foucault : Inversion d’un milieu 3D. Rapport de recherche, EPM, 2003.
- Y. Goussard and R. Guichard. Inversion 3D en tomographie par courants de Foucault. Rapport de recherche, EPM, 2004.
- Y. Goussard and R. Guichard. Inversion 3D en tomographie par courants de Foucault. Rapport de recherche, EPM, 2005.
- Y. Goussard and R. Guichard. Etude de la caractérisation de défauts débouchants intervenant dans les composants métalliques lorsque la taille des défauts débouchants est inférieure à 5mm. Rapport de recherche, EPM, 2007.
- R. F. Harrington. *Field Computation by Moment Methods*. Wiley-IEEE Press, 1993.

- I.-T. Hsiao, W. Wang, and G. Gindi. Performance comparison of smoothing and gamma priors for transmission tomography. In *Nuclear Science Symposium, 1999. Conference Record. 1999 IEEE*, volume 2, pages 860 –864 vol.2, 1999.
- J. Idier, editor. *Bayesian Approach to Inverse Problems*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, avr. 2008.
- J. Jin. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- R. Kindermann and J. L. Snell. *Markov Random Fields and Their Applications*. AMS, 1980. ISBN 0-8218-3381-2.
- S. Kirkpatrick, D. G. Jr., and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 (4598) :671–680, 1983.
- R. E. Kleinman and P. M. van den Berg. Modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 42(1) :17 – 35, 1992.
- R. E. Kleinman and P. M. van den Berg. Extended range-modified gradient technique for profile inversion. *Radio Science*, 28(5 pt 1) :877 – 884, 1993.
- V. Kolmogorov and R. Zabih. What energy functions can be minimized via graph cuts? *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2) :147 – 159, 2004.
- E. Kriezis, T. Tsiboukis, S. Panas, and J. Tegopoulos. Eddy currents : theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80(10) :1559–1589, Oct 1992.
- C. Labat. *Algorithmes d’optimisation de critères pénalisés pour la restauration d’images. Application à la déconvolution de trains d’impulsions en imagerie ultrasonore*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, déc. 2006.
- M. Lambert. TE scattering by cylindrical dielectric obstacle buried in half-space : a H-field-based solution methode. *Journal of Electromagnetic Wave and Applications*, 12 :1217–1239, 1998.
- A. Litman, D. Lesselier, and F. Santosa. A level-set approach for eddy current imaging of defects in a conductive half-space. In *Inverse Problems of Wave Propagation and Diffraction. Proceedings of the Conference*, pages 250 – 62, Berlin, Germany, 1997.
- H. Lu, Y. Kim, and J. Anderson. Improved poisson intensity estimation : denoising application using poisson data. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(8) :1128–1135, Aug. 2004.
- S.-A. Magnier, P. Mora, and A. Tarantola. Finite differences on minimal grids. *Geophysics*, 59 (9) :1435 – 1443, 1994.
- A. Massa, M. Donelli, F. De Natale, S. Caorsi, and A. Lommi. Planar antenna array control with genetic algorithms and adaptive array theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(11) :2919–2924, Nov. 2004.
- M. Mitchell. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- V. Monebhurrin, D. Lesselier, B. Duchêne, A. Ruosi, M. Valentino, G. P. Pepe, and G. Peluso. Eddy current non-destructive evaluation using SQUIDS. In D. Lesselier and A. Razek, editors, *Electromagnetic nondestructive evaluation (III)*. IOS Press, 1999.
- V. Monebhurrin. *Formulation intégrale de volume et inversion non linéaire. Application au contrôle non destructif par courants de Foucault des tubes de générateur de vapeur*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Oct. 1997.
- M. Nikolova and A. Mohammad-Djafari. Eddy current tomography using a binary Markov model. *Signal Processing*, 49 :119–132, 1996.

- J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical optimization*. Springer series in operations research and financial engineering. Springer, New York, NY, 2. ed. edition, 2006. ISBN 978-0-387-30303-1.
- S. Paillard, G. Pichenot, M. Lambert, H. Voillaume, and N. Dominguez. A 3D model for eddy current inspection in aeronautics : application to riveted structures. In D. Thompson and D. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, American Institute of Physics Conference, 2007*, volume 26, pages 265–272, 2007.
- D. K. Pickard. Inference for discrete Markov fields : the simplest nontrivial case. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397), mar 1987.
- D. Premel and A. Baussard. Eddy-current evaluation of three-dimensional flaws in flat conductive materials using a bayesian approach. *Inverse Problems*, 18(6) :1873 – 89, december 2002.
- D. Prémel and A. Mohammad-Djafari. Eddy current tomography in cylindrical geometry. *IEEE Transactions on Magnetism*, M-31(3) :2000–2003, May 1995.
- W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1992.
- C. Ramananjaona, M. Lambert, D. Lesselier, and J.-P. Zolesio. Shape reconstruction of buried obstacles by controlled evolution of a level set : From a min-max formulation to numerical experimentation. *Inverse Problems*, 17(4) :1087 – 1111, 2001.
- I. T. Rekanos, T. P. Theodoulidis, S. M. Panas, and T. D. Tsiboukis. Impedance inversion in eddy current testing of layered planar structures via neural networks. *NDT & E International*, 30 (2) :69–74, 1997.
- L. Rudin and S. Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 1, pages 31–35 vol.1, Nov 1994.
- A. Ruosi, M. Valentino, G. Pepe, V. Monebhurrin, D. Lesselier, and B. Duchene. High tc SQUIDS and eddy-current NDE : A comprehensive investigation from real data to modelling. *Measurement Science and Technology*, 11(11) :1639 – 1648, 2000.
- R. V. Sabariego and P. Dular. A perturbation approach for the modeling of eddy current non-destructive testing problems with differential probes. *IEEE Transactions on Magnetism*, 43(4) : 1289–1292, 2007.
- P. P. Silvester and R. L. Ferrari. *Finite Element for Electrical Engineers*. Cambridge University Press, 1996.
- F. Sirois and F. Roy. Computation of 2-d current distribution in superconductors of arbitrary shapes using a new semi-analytical method. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 17(3) :3836–3845, Sept. 2007.
- A. Skarlatos, G. Pichenot, D. Lesselier, M. Lambert, and B. Duchene. Numerical modeling of eddy current nondestructive evaluation of ferromagnetic tubes via an integral equation approach. In *12th International Workshop on Electromagnetic Non Destructive Evaluation (ENDE 07)*, Cardiff, june 2007.
- K. A. Slaney M. and L. L.E. Limitations of imaging with first-order diffraction tomography. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 32(8) :860 – 874, Aug 1984.
- M. Soleimani, W. R. B. Lionheart, A. J. Peyton, X. Ma, and S. R. Hignson. A three-dimensional inverse finite-element method applied to experimental eddy-current imaging data. *IEEE Transactions on Magnetism*, 42(5) :1560 – 1567, 2006.

- T. Sollier and J. Lechien. Caractérisation de défauts débouchants par cf. action CEA/EDF 131. synthèse des travaux 2003. Rapport technique, CEA, 2003.
- T. Sollier and D. Premel. Synthèse de l'action CEA-EDF 131 en 2002. évaluation des performances du contrôle CF sur défauts débouchants. Rapport technique, CEA, 2002.
- S.-J. Song and Y.-K. Shin. Eddy current flaw characterization in tubes by neural networks and finite element modeling. *NDT & E International*, 33 :233–243, 2000.
- S. Sotthivirat and J. Fessler. Image recovery using partitioned-separable paraboloidal surrogate coordinate ascent algorithms. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(3) :306–317, Mar 2002.
- L. Souriau, B. Duchêne, D. Lesselier, and R. E. Kleinman. Modified gradient approach to inverse scattering for binary objects in stratified media. *Inverse Problems*, 12(4) :463–481, 1996.
- M. Tao and J. Yang. Alternating direction algorithms for total variation deconvolution in image reconstruction. Research rep., Rice University, 2009.
- P. Thomas. *Eléments finis pour l'ingénieur*. Tec et Doc, 2006.
- A. Trillon. Inversion données CF par modèle différences finies. Research rep., EDF, EPM, IRCCyN, 2009.
- A. Trillon, A. Girard, J. Idier, Y. Goussard, F. Sirois, S. Dubost, and N. Paul. Eddy current tomography based on a finite difference forward model with additive regularization. In *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, Kingston, RI, USA, juil. 2009.
- P. M. van den Berg and A. Abubakar. Contrast source inversion method : state of art. *Progress In Electromagnetics Research*, 34 :189–218, 2001.
- P. M. van den Berg and A. Abubakar. Inverse scattering and its application to medical imaging and subsurface sensing. *Radio Sci. Bull.*, 303 :869–877, 2002.
- P. M. van den Berg and R. Kleinman. Total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction. *Inverse Problems*, 11(3) :5–10, 1995.
- P. M. van den Berg and R. Kleinman. A contrast source inversion method. *Inverse Problems*, 13 (6) :1607 – 20, 1997.
- P. van den Berg, A. Abubakar, and T. Habashy. Integral and finite-difference formulations of the contrast source inversion method. In *Electromagnetics in Advanced Applications, 2009. ICEAA '09. International Conference on*, pages 144–147, Sept. 2009.
- Y. Wang and W. C. Chew. Reconstruction of permittivity distribution using the born iterative and distorted born iterative methods for geophysical applications. In *Digest - International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 379 – 382, College Park, MD, USA, 1990.
- M. Wanin. Évaluation non destructive de la qualité des matériaux (Partie 1). *Techniques de l'ingénieur*, 2001.
- A. Wirgin. The inverse crime, 2004. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00001084/en/>. Research report.
- D. Wu, J. Chen, and C. Liu. Comparison of different finite-difference schemes of modeling marine controlled-source electromagnetic fields for hydrocarbon exploration. *PIERS Online*, 3(2) :145–148, 2007.

- N. Yusa, W. Cheng, Z. Chen, and K. Miya. Generalized neural network approach to eddy current inversion for real cracks. *NDT & E International*, 35 :609–614, 2002.
- C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. Algorithm 778. L-BFGS-B : Fortran subroutines for Large-Scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23 (4) :550–560, 1997.
- R. Zorgati, B. Duchêne, D. Lesselier, and F. Pons. Eddy current testing of anomalies in conductive materials, part I : qualitative imaging via diffraction tomography techniques. *IEEE Transactions on Magnetism*, 27(6) :4416–4437, 1991.
- R. Zorgati, B. Duchêne, D. Lesselier, and F. Pons. Eddy current testing of anomalies in conductive materials, part II : quantitative imaging via deterministic and stochastic inversion techniques. *IEEE Transactions on Magnetism*, 28(3) :1850–1862, 1992.
- R. Zorgati. Catalogue de méthodes inverses en contrôle non destructif. Note EDF, EDF, 1998. HP-21/96/009.
- P. Zwamborn. *Scattering by objects with electric constraint*. Ph.d. thesis, Delft university, 1997.

# Table des figures

I.1	Voisinage 4-connexe . . . . .	11
I.2	Cliques pour un voisinage 4-connexe . . . . .	11
I.3	Critères avec ou sans contraintes de couplage . . . . .	27
II.1	Disposition du capteur . . . . .	34
II.2	Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm . . . . .	40
II.3	Données simulées avec modèle linéaire en comparaison avec COMSOL : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	40
III.1	Valeur absolue du champ électrique incident estimé avec COMSOL : coupe horizontale (a) et coupe verticale (b). . . . .	49
III.2	Champ électrique incident avec le modèle différences finies : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	50
III.3	Champ électrique incident avec modèle par COMSOL (distances en mètre) : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	51
III.4	Comparaisons du champ électrique sur la ligne horizontale à l'altitude $z = 0,5$ mm : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	51
III.5	Comparaisons du champ électrique sur la ligne verticale à l'abscisse $x = -1,4$ mm : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	52
III.6	Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm . . . . .	52
III.7	Comparaison entre les données CF par COMSOL et par le modèle DF : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	53
IV.1	Exemple de maillage triangulaire non structuré utilisé dans cet ouvrage (distances en mètre) . . . . .	56
IV.2	Forme de la matrice $\mathbf{L}$ . . . . .	58
IV.3	Comparaison entre les données : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	60
V.1	Impact du paramètre $\lambda$ sur la qualité de reconstruction . . . . .	74
V.2	Fonctions de pénalisation . . . . .	76
V.3	Distance entre deux éléments . . . . .	76
VI.1	Matrices $\mathbf{A}_0$ , $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ . . . . .	89
VII.1	Maillage $\Omega$ utilisé pour l'inversion (axes en mètre) . . . . .	97
VII.2	Défaut simulé d'une profondeur de 1 mm : défaut (a), parties réelle (b) et imaginaire (c) . . . . .	98
VII.3	Défauts simulés pour la reconstruction . . . . .	99
VIII.1	Reconstructions avec la méthode EDF-EPM . . . . .	102
VIII.2	Effet de la régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur sans contraintes de bornes et sans bruit . . . . .	103
VIII.3	Effet des différents termes de régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	104



VIII.4	Effet de la régularisation sur la reconstruction par DF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur avec contraintes de bornes . . . . .	105
VIII.5	EQR pour DF-Basique au cours des itérations pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	105
VIII.6	Effet de la matrice $\mathbf{D}$ sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	107
VIII.7	Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	107
VIII.8	EQR pour EF-Basique au cours des itérations pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	108
VIII.9	Données (a) et (b) et critère (c) au cours des itérations pour la régularisation $L_2L_1 - L_1$ . . . . .	108
VIII.10	Résultats de reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur pour 2 initialisations . . . . .	109
VIII.11	Critère en fonction de $\nu$ . . . . .	109
VIII.12	Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	110
VIII.13	Effet de la régularisation sur la reconstruction par EF-Basique pour le défaut long	110
VIII.14	Comparaison des résultats de reconstruction entre les méthodes pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	112
VIII.15	Comparaison des EQR et du critère primal entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	113
VIII.16	Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	114
VIII.17	Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	115
VIII.18	Evolution de $\lambda_{\text{CSI}}$ au cours des itérations pour les défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur . . . . .	115
VIII.19	Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour le défaut de 2 mm de profondeur avec le même $\lambda_{\text{CSI}}$ final . . . . .	116
VIII.20	Comparaison entre les méthodes de reconstruction pour les défauts de 1 mm et 2 mm de profondeur en termes de nombre d'itérations . . . . .	116
VIII.21	Diagrammes de la profondeur estimée (a) et du temps (b) en fonction de la profondeur du défaut à estimer pour les méthodes EF-Basique et EF-CSI avec ou sans réglage automatique de $\lambda$ . . . . .	118
VIII.22	Impact du paramètre $\lambda$ sur la qualité de reconstruction pour la méthode EF-Basique dans le cas du défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	119
VIII.23	Impact de $\lambda$ sur la qualité de reconstruction et la vitesse de convergence pour la méthode EF-Basique . . . . .	119
IX.1	Effet de la régularisation sur la méthode EF-AL-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	122
IX.2	EQR pour EF-AL-Basique au cours des itérations pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	122
IX.3	Etude du critère primal $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$ , de l'erreur de couplage et de $\lambda$ au cours des itérations . . . . .	123
IX.4	Résultats de reconstruction par EF-AL-Basique pour le défaut de 2 mm de profondeur pour deux initialisations . . . . .	123
IX.5	Critère en fonction de $\nu$ . . . . .	124
IX.6	Reconstructions pour la méthode EF-Basique (a) et EF-AL-Basique (b) pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	124
IX.7	EQR et critère primal $\mathcal{J}_{\text{NL}}(\mathbf{x})$ pour la méthode EF-Basique et pour la méthode EF-AL-Basique . . . . .	125

IX.8	$\lambda$ et nombre d'itérations GC pour la méthode EF-Basique et pour la méthode EF-AL-Basique . . . . .	125
IX.9	Effet du Lagrangien augmenté sur EF-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	126
IX.10	Effet du Lagrangien augmenté sur EF-Basique pour le défaut long . . . . .	126
IX.11	Reconstructions pour la méthode EF-CSI avec $\lambda_{\text{CSI}}$ auto.(a), EF-AL-Basique et EF-AL-CSI (c) pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	128
IX.12	Comparaisons des méthodes EF-AL-Basique, EF-AL-CSI et EF-CSI avec $\lambda_{\text{CSI}}$ automatique pour le défaut de 2 mm de profondeur . . . . .	128
IX.13	Résultats de reconstruction par EF-AL-CSI pour le défaut de 2 mm de profondeur pour 2 initialisations . . . . .	129
IX.14	Diagrammes de la profondeur estimée (a) et du temps (b) en fonction de la profondeur du défaut à estimer pour les méthodes EF-AL-Basique, EF-AL-CSI et EF-CSI avec réglage automatique de $\lambda$ . . . . .	132
A.1	Défaut et données simulées pour un défaut carré . . . . .	143
A.2	Défaut et données simulées pour un défaut profond . . . . .	144
A.3	Défaut et données simulées pour un défaut de 1 mm . . . . .	144
A.4	Défaut et données simulées pour un défaut transverse de 1.4 mm . . . . .	144
C.1	Transformation $T^k$ . . . . .	150
G.1	Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut de 1 mm . . . . .	163
G.2	Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut de 2 mm . . . . .	163
G.3	Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut long . . . . .	164
G.4	Reconstructions avec la méthode EDF-EPM pour le défaut carré . . . . .	164
H.1	Reconstructions pour le défaut de 1 mm . . . . .	165
H.2	Reconstructions pour le défaut de 1.5 mm . . . . .	166
H.3	Reconstructions pour le défaut de 2 mm . . . . .	166
H.4	Reconstructions pour le défaut de 2.5 mm . . . . .	167
H.5	Reconstructions pour le défaut long . . . . .	167
I.1	Triangle avec une orientation anti-horaire des vecteurs tangents. . . . .	171
I.2	Matrices creuses avant et après modifications . . . . .	175
I.3	Comparaison entre les données : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	178
I.4	Ecart entre les données et COMSOL : parties réelle (a) et imaginaire (b) . . . . .	178
I.5	Conductivité relative en fonction de la résistivité relative . . . . .	180
I.6	Reconstructions pour la méthode EF-CI-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur avec régularisation sur $\mathbf{x}_\rho$ . . . . .	181
I.7	Critère EF-CI-Basique pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	181
I.8	Défaut de 1 mm de profondeur avec la méthode EF-CI-Basique avec régularisation sur $\mathbf{x}_\rho$ et minimisation par rapport à $\mathbf{x}_\rho$ : (a) défaut simulé, (b) solution $\mathbf{x}_\rho$ et (c) $\mathbf{x}_\sigma$ . . . . .	182
J.1	Schemas des capteurs COM1 et SEP1 . . . . .	183
J.2	Exemple de données avec le capteur COM1 . . . . .	184

# Liste des tableaux

I.1	Algorithme classique de la méthode de Born itérative . . . . .	20
I.2	Algorithme de minimisation de la méthode MGM . . . . .	23
I.3	Algorithme de minimisation de la méthode CSI . . . . .	23
I.4	Tableau récapitulatif et comparatif des méthodes MGM et CSI . . . . .	25
VI.1	Algorithme de minimisation de la méthode XF-Basique . . . . .	81
VI.2	Fonctions de régularisation utilisées et leurs dérivées . . . . .	82
VI.3	Equations de $\mathbf{t}_\ell$ . . . . .	86
VI.4	Algorithme de la méthode XF-Basique avec Lagrangien augmenté : XF-AL-Basique . . . . .	87
VI.5	Equations de $\mathbf{t}_\ell$ et $\mathbf{t}_\ell^0$ . . . . .	88
VI.6	Coût mémoire pour les différentes méthodes . . . . .	89
VI.7	Coût mémoire pour les différentes méthodes pour le maillage utilisé . . . . .	90
VI.8	Coût de calcul pour les différentes méthodes . . . . .	90
VI.9	Coût de calcul pour les différentes méthodes pour le maillage utilisé . . . . .	91
VIII.1	EQR des reconstructions pour différents couples $(\beta, \gamma)$ pour le défaut de 1 mm de profondeur . . . . .	104
VIII.2	EQR des reconstructions pour différentes régularisations avec ou sans contraintes de bornes . . . . .	106
VIII.3	EQR, profondeur, nombre d'itérations CSI et temps de calcul pour différents défauts avec la méthode EF-Basique avec le réglage $(\lambda, \beta, \delta, \gamma) = (10^{12}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-2})$ . . . . .	111
VIII.4	EQR, profondeur et temps de calcul pour les différentes méthodes pour le défaut 2 mm avec $\lambda_{\text{CSI}} = 3,8 \times 10^{12}$ . . . . .	114
VIII.5	EQR pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	116
VIII.6	Temps de calcul en [s] nécessaire pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	117
IX.1	EQR pour les deux méthodes pour différents défauts . . . . .	127
IX.2	Nombre d'itérations CSI pour les deux méthodes pour différents défauts . . . . .	127
IX.3	Temps total [s] pour les deux méthodes pour différents défauts . . . . .	127
IX.4	EQR pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	129
IX.5	Profondeur pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	130
IX.6	Largeur pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	130
IX.7	Critère primal pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	131
IX.8	Nombre d'itérations CSI pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	131
IX.9	Temps en [s] pour les différentes méthodes et les différents défauts . . . . .	131
B.1	Paramètres . . . . .	145
B.2	Capteur . . . . .	145
B.3	Domaine de calcul . . . . .	146
D.1	Gradients conjugués linéaire avec préconditionnement . . . . .	154
D.2	Algorithme de GC non linéaire . . . . .	154

**Titre :** *Reconstruction de défauts à partir de données issues de capteurs à courants de Foucault avec modèle direct différentiel*

**Résumé :**

La tomographie par courants de Foucault peut être utilisée pour évaluer la forme et le volume de défauts dans des plaques métalliques de générateur de vapeur de centrale nucléaire. L'objectif du travail présenté est de cartographier la distribution d'une grandeur représentative du défaut, ici la conductivité relative. Ce problème est difficile à résoudre car mal-posé et non-linéaire. Afin de le résoudre un modèle numérique est nécessaire. Nos travaux ont tout d'abord consisté à étudier les modèles directs existants pour choisir le plus adapté à notre cas. Il s'est avéré que les méthodes différentielles, différences finies ou éléments finis, étaient les plus adaptées à notre cas.

Une fois que le modèle direct a été choisi, nous avons adapté les méthodes de type *contrast source inversion* (CSI) à ce modèle, puis proposé un nouveau critère à minimiser. Les méthodes de type CSI sont basées sur la minimisation de l'erreur quadratique pondérée des équations du modèle, observation et couplage. Par construction, elles autorisent une erreur sur ces équations. Il apparaît que les résultats de reconstruction s'améliorent lorsque l'erreur sur l'équation de couplage diminue. Afin de contraindre cette équation en évitant des problèmes de conditionnement, on a eu recours à une technique de Lagrangien augmenté.

Enfin, le caractère mal-posé de ce problème peut être contourné en introduisant des informations *a priori* adéquates notamment sur la forme générale des défauts à reconstruire ainsi que sur les valeurs possibles de la conductivité relative.

L'efficacité des méthodes développées est illustrée avec des cas simulés en 2D.

**Mots-clés :** tomographie par courants de Foucault, différences finies, éléments finis, contrast source inversion (CSI), Lagrangien augmenté

**Title :** *Eddy current tomography with a differential forward model*

**Abstract :** Eddy current tomography can be employed to characterize flaws in metal plates in steam generators of nuclear power plants. Our goal is to evaluate a map of the relative conductivity that represents the flaw. This nonlinear ill-posed problem is difficult to solve and a forward model is needed. First, we studied existing forward models to chose the one that is the most adapted to our case. Finite difference and finite element methods matched very good to our application.

We adapted *contrast source inversion* (CSI) type methods to the chosen model and a new criterion was proposed. These methods are based on the minimization of the weighted errors of the model equations, coupling and observation. They allow an error on the equations. It appeared that reconstruction quality grows with the decay of the error on the coupling equation. We resorted to augmented Lagrangian techniques to constrain coupling equation and to avoid conditioning problems.

In order to overcome the ill-posed character of the problem, prior information was introduced about the shape of the flaw and the values of the relative conductivity.

Efficiency of the methods are illustrated with simulated flaws in 2D case.

**Keywords :** Eddy current tomography, finite difference, finite element, contrast source inversion (CSI), augmented Lagrangian